

Metody numeryczne

Metody rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach.

Otrzymywane tą drogą wyniki są na ogół przybliżone, jednak dokładność obliczeń może być z góry określona i dobiera się ją zależnie od potrzeb.

Wykorzystywane są wówczas,

gdy badany problem nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego (danego wzorami), lub korzystanie z takich rozwiązań jest uciążliwe ze względu na ich złożoność.



Skrypty:

**Szatkowski A., Cichosz J.: Metody numeryczne,
Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2010.**

**Salamon R. i Makowski M. S. : Matlab – podstawy
i zastosowania. Skrypt w wersji elektronicznej.
<http://eti.pg.edu.pl/katedra-systemow-sonarowych/tois>**

Zagadnienia omawiane na wykładzie **(część Metody numeryczne):**

- 1. Błędy w obliczeniach.**
- 2. Metody rozwiązywania układów równań liniowych:**
 - metody dokładne: metoda eliminacji Gaussa, dekompozycji LU,**
 - metody iteracyjne: Jacobiego, Gaussa-Seidla.**
- 3. Wybrane metody przybliżonego wyznaczania rozwiązań równania nieliniowego: bisekcji, siecznych, stycznych, iteracji prostej, reguła falsi.**
- 4. Aproksymacja funkcji: interpolacja, aproksymacja.**

Błędy w obliczeniach

Błąd bezwzględny w obliczeniach definiuje się jako różnicę między wartością dokładną x a jej wartością przybliżoną otrzymaną jako wynik rozwiązania pewnego zadania obliczeniowego.

$$\delta = x - \hat{x}$$

W celu określenia dokładności obliczeń określa się zwykle **graniczny** (tzn. maksymalny) **błąd bezwzględny** wyrażany w jednostkach wielkości obliczanej

$$\delta_M = \max |x - \hat{x}|$$

lub **graniczny błąd względny** wyrażany w postaci ułamka lub procentu wartości obliczanej wielkości

$$\varepsilon_M = \left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right|$$

Rozpatruje się **trzy** główne przyczyny powstawania niedokładności w trakcie realizacji obliczeń:

- **błędy danych wejściowych,**
- **błędy obciążenia,**
- **błędy zaokrągleń.**

Błędy danych wejściowych powodowane są przez skończoną długość słowa stosowanego w maszynie cyfrowej (skończoną dyskretną reprezentację liczb stosowanych w obliczeniach komputerowych)

i związaną z tym w konsekwencji niemożliwością przedstawienia wartości rzeczywistej w postaci dokładnego zapisu liczbowego dla dalszych obliczeń. Przez odpowiednią rozbudowę algorytmu numerycznego można błąd danych wejściowych uczynić dowolnie małym, ale odbywa się to kosztem zmniejszenia efektywności obliczeń.

Błędy obcięcia i zaokrąglenia powstają także podczas operacji arytmetycznych w czasie realizacji programu.

Przyczyną powstawania błędów obcięcia jest także konieczne ograniczenie nieskończonego ciągu obliczeń (np. przy stosowaniu algorytmów iteracyjnych) do skończonej liczby działań.

Przypomnienie o przedrostkach:

„m” (mili) – 10^{-3}

„μ” (mikro) - 10^{-6}

„n” (nano) - 10^{-9}

Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Poszukujemy rozwiązania układu równań liniowych $A \cdot x = b$, $\det A \neq 0$

Rozwiązaniem jest wektor x^*

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdot \\ x_n^* \end{bmatrix} \quad A \cdot x^* = b$$

Metody dokładne:

eliminacji Gaussa, dekompozycji LU

Otrzymujemy rozwiązanie po określonej liczbie działań arytmetycznych, która zależy od liczby równań w układzie równań - n

Metody iteracyjne (przybliżone):

Jacobiego, Gaussa-Seidla

Nie potrafimy określić ile kolejnych iteracji k należy wykonać, żeby oszacować wektor zbliżony do wektora x^*

$$x_{(k+1)} = f(x_{(k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

\mathbf{A} - jest daną macierzą $n \times n$ -wymiarową o elementach będących liczbami rzeczywistymi

\mathbf{b} - jest wektorem wyrazów wolnych

\mathbf{x} - jest wektorem niewiadomych

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} \cdot x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \cdot x_1 + a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)} \\ \hline a_{n1}^{(1)} \cdot x_1 + a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + a_{n3}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right\}, \quad (1)$$

Dwa etapy:

- 1. Etap eliminacji w przód**
- 2. Etap podstawiania wstecz**

Krok 1 etapu eliminacji w przód:

Zakłada się, że $a_{11}^{(1)} \neq 0$. **Pierwsze** równanie układu równań (1) mnożymy kolejno przez współczynnik:

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad , \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, n \quad , \quad (2)$$

i odejmujemy stronami od równania o numerze i tego układu równań. Otrzymujemy układ równań:

$$\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} \cdot x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} \cdot x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\ \hline a_{n2}^{(2)} \cdot x_2 + a_{n3}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} \cdot x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right\} \quad , \quad (3)$$

Wyeliminowano zmienną x_1 ze wszystkich równań oprócz pierwszego.

Krok 2 etapu eliminacji w przód:

Zakłada się, że $a_{22}^{(2)} \neq 0$. **Drugie** równanie układu równań (3) mnożymy kolejno przez współczynnik:

$$l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \quad , \quad \text{dla } i = 3, 4, \dots, n \quad , \quad (4)$$

i odejmujemy stronami od równania o numerze i tego układu równań. Otrzymujemy układ równań:

$$\mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(3)}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \quad , \quad (5) \end{aligned}$$

$$a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)}$$

Wyliminowano zmienną x_1 ze wszystkich równań oprócz pierwszego.

Wyliminowano zmienną x_2 ze wszystkich równań oprócz pierwszego i drugiego.

Krok k etapu eliminacji w przód:

Zakłada się, że $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Równanie o numerze k przekształconego w poprzednim kroku układu równań mnożymy kolejno przez współczynnik:

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad \text{dla } i = k+1, k+2, \dots, n, \quad (6)$$

i odejmujemy stronami od równania o numerze i tego układu równań. Otrzymujemy układ równań:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k+1)}$$

Po wykonaniu $n-1$ kroków eliminacji w przód otrzymujemy układ równań mający postać macierzy trójkątnej górnej:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} \cdot x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} \cdot x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\ \hline a_{nn}^{(n)} \cdot x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right\}, \quad (7)$$

KONIEC ETAPU ELIMINACJI W PRZÓD

Etap podstawiania wstecz.

Krok 1.

Z ostatniego równania układu równań (7) wyznacza się liczbę

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \quad (8)$$

Krok 2.

Otrzymaną wartość $x_n = x_n^*$

podstawiamy w przedostatnim wierszu za x_n i wyznaczamy x_{n-1} .

Krok n.

Po podstawieniu do pierwszego równania wyznaczonych poprzednio wartości $x_n^*, x_{n-1}^*, \dots, x_2^*$

obliczamy wartość x_1^* .

KONIEC ETAPU PODSTAWIANIA WSTECZ

Uwagi:

W rozwiązywanym równaniu elementy macierzy A na głównej przekątnej muszą być $\neq 0$. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, to należy pozamieniać wiersze miejscami.

Rozwiązanie układu składającego się z n równań liniowych metodą eliminacji Gaussa wymaga wykonania:

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \quad \text{działań mnożenia i dzielenia}$$

i

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \quad \text{działań dodawania i odejmowania}$$

Przykład:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 1:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 1:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 1:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 1:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok **1**:

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

$$1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 6^{(1)}$$

$$1x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

Od równania o numerze **2** odejmujemy równanie numer **1** wymnożone przez współczynnik $l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$

$$1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 6^{(1)}$$

"-"

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 5^{(1)} / \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 + \frac{3}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = \frac{7}{2}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 1:

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

$$1x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 6^{(1)}$$

$$1x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

Od równania o numerze 3 odejmujemy równanie numer 1 wymnożone przez współczynnik $l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$

$$1x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

"-"

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 5^{(1)} \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 + \frac{1}{2}x_2^{(2)} + \frac{3}{2}x_3^{(2)} = \frac{5}{2}^{(2)}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 2:

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

$$\frac{3}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = \frac{7}{2}^{(2)}$$

$$\frac{1}{2}x_2^{(2)} + \frac{3}{2}x_3^{(2)} = \frac{5}{2}^{(2)}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Przykład, eliminacja w przód, krok 2:

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$

$$\frac{3}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = \frac{7}{2}^{(2)}$$

$$\frac{1}{2}x_2^{(2)} + \frac{3}{2}x_3^{(2)} = \frac{5}{2}^{(2)}$$

Od równania o numerze 3 odejmujemy równanie numer 2 wymnożone przez współczynnik $l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}x_2^{(2)} + \frac{3}{2}x_3^{(2)} = \frac{5}{2}^{(2)}$$

" - "

$$\frac{3}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = \frac{7}{2}^{(2)} \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{6}x_3^{(3)} = \frac{8}{6}^{(3)}$$

Przykład, eliminacja w przód, **układ równań po ostatnim kroku** :

$$\begin{aligned}2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} &= 5^{(1)} \\ \frac{3}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} &= \frac{7}{2}^{(2)} \\ \frac{8}{6}x_3^{(3)} &= \frac{8}{6}^{(3)}\end{aligned}$$

Przykład, podstawianie wstecz, krok 1:

$$\frac{8}{6}x_3^{(3)} = \frac{8^{(3)}}{6}$$



$$x_3 = 1$$

podstawianie wstecz, krok 2:

$$\frac{3}{2}x_2^{(2)} + \frac{1}{2}x_3^{(2)} = \frac{7^{(2)}}{2}$$



$$x_2 = 2$$

podstawianie wstecz, krok 3:

$$2x_1^{(1)} + 1x_2^{(1)} + 1x_3^{(1)} = 5^{(1)}$$



$$x_1 = 1$$

Metoda dekompozycji LU

$$A \cdot x = b$$

$$\det A \neq 0$$

A - jest daną macierzą $n \times n$ -wymiarową o elementach będących liczbami rzeczywistymi

b - jest wektorem wyrazów wolnych

x - jest wektorem niewiadomych

$$A x = b$$

$$[L U] x = b$$

$$A = L U$$

L – macierz trójkątna dolna, otrzymana z macierzy A ,

U – macierz trójkątna górna, otrzymana z macierzy A .

$$L y = b \quad (1) \quad \longrightarrow \text{wyznaczamy } y$$

$$U x = y \quad (2) \quad \longrightarrow \text{wyznaczamy } x$$

Macierz U

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix}
 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\
 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\
 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n}^{(4)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1
 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Macierz L

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix}
 a_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\
 a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(3)} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(n)}
 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Algorytm Crouta

Przykład dla $n = 4$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Pomocnicza macierz Q

$$Q = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Elementy macierzy Q , dla $n = 4$, są obliczane w kolejności zaznaczonej w poniższej tablicy

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 13 & 15 \\ 4 & 10 & 14 & 16 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \hline l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} \\ \hline l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \\ \hline \end{array}$$

Numer oznacza kolejność obliczania elementów.

Najpierw obliczamy elementy macierzy L (pierwsza kolumna),
potem elementy macierzy U (pierwszy wiersz, bez pierwszego elementu
macierzy U , który jest równy 1),

potem elementy macierzy L (druga kolumna, bez pierwszego elementu,
który jest równy 0),

potem elementy macierzy U (drugi wiersz, ale bez pierwszego i drugiego
elementu macierzy U , które są odpowiednio równe 0 i 1),

potem elementy macierzy L , itd.

Biorąc pod uwagę zależność (5), wykonujemy obliczenia dla kolejnego elementu a_{ij} w postaci iloczynu i -tego wiersza macierzy L i j -tej kolumny macierzy U

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= l_{11} \cdot 1 & l_{11} &= a_{11}, \\
 a_{21} &= l_{21} \cdot 1 & l_{21} &= a_{21}, \\
 a_{31} &= l_{31} \cdot 1 & l_{31} &= a_{31}, \\
 a_{41} &= l_{41} \cdot 1 & l_{41} &= a_{41},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= l_{11} \cdot u_{12} & u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}}, \\
 a_{13} &= l_{11} \cdot u_{13} & u_{13} &= \frac{a_{13}}{l_{11}}, \\
 a_{14} &= l_{11} \cdot u_{14} & u_{14} &= \frac{a_{14}}{l_{11}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{22} = l_{21} \cdot u_{12} + l_{22}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12},$$

$$a_{32} = l_{31} \cdot u_{12} + l_{32}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12},$$

$$a_{42} = l_{41} \cdot u_{12} + l_{42}$$

$$l_{42} = a_{42} - l_{41} \cdot u_{12},$$

$$a_{23} = l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}}{l_{22}},$$

$$a_{24} = l_{21} \cdot u_{14} + l_{22} \cdot u_{24}$$

$$u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21} \cdot u_{14}}{l_{22}},$$

$$Q = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & \boxed{l_{33}} & \boxed{u_{34}} \\ l_{41} & l_{42} & \boxed{l_{43}} & \boxed{l_{44}} \end{bmatrix}$$

$$a_{33} = l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23},$$

$$a_{43} = l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43}$$

$$l_{43} = a_{43} - l_{41} \cdot u_{13} - l_{42} \cdot u_{23},$$

$$a_{34} = l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + l_{33} \cdot u_{34}$$

$$u_{34} = \frac{a_{34} - l_{31} \cdot u_{14} - l_{32} \cdot u_{24}}{l_{33}},$$

$$a_{44} = l_{41} \cdot u_{14} + l_{42} \cdot u_{24} + l_{43} \cdot u_{34} + l_{44}$$

$$l_{44} = a_{44} - l_{41} \cdot u_{14} - l_{42} \cdot u_{24} - l_{43} \cdot u_{34}.$$

Zakończenie – wyznaczenie x

$$L y = b$$

$$U x = y$$

Przykład

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

1	4	5
2	6	8
3	7	9

$$l_{11} = a_{11} = 2$$

$$l_{21} = a_{21} = 1$$

$$l_{31} = a_{31} = 1$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = 2 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12} = 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

1	4	5
2	6	8
3	7	9

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}}{l_{22}} = \frac{1 - 1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23} = 2 - 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{12}{6} - \frac{3+1}{6} = \frac{8}{6}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{8}{6} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{8}{6} \end{bmatrix}$$

L·y = b

$$\begin{aligned} 2 \cdot y_1 &= 5 \\ 1 \cdot y_1 + \frac{3}{2} \cdot y_2 &= 6 \\ 1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot y_2 + \frac{8}{6} \cdot y_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{5}{2}$$

$$1 \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot y_2 = 6$$

$$\frac{3}{2} \cdot y_2 = 6 - \frac{5}{2} \rightarrow y_2 = \frac{7}{3}$$

$$1 \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} + \frac{8}{6} \cdot y_3 = 5 \rightarrow \frac{8}{6} \cdot y_3 = \frac{30}{6} - \left(\frac{15}{6} + \frac{7}{6} \right) = \frac{8}{6} \rightarrow y_3 = 1$$

U·x = y

$$1 \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_3 = \frac{5}{2}$$

$$1 \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_3 = \frac{7}{3}$$

$$1 \cdot x_3 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3} \rightarrow x_2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow x_2 = 2$$

$$1 \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \rightarrow x_1 = \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x_1 = 1$$