

Aproksymacja funkcji

Aproksymacja oznacza przybliżanie.

W matematyce aproksymacja oznacza zastąpienie **funkcji aproksymowanej funkcją aproksymującą** z reguły funkcją o prostszej postaci.

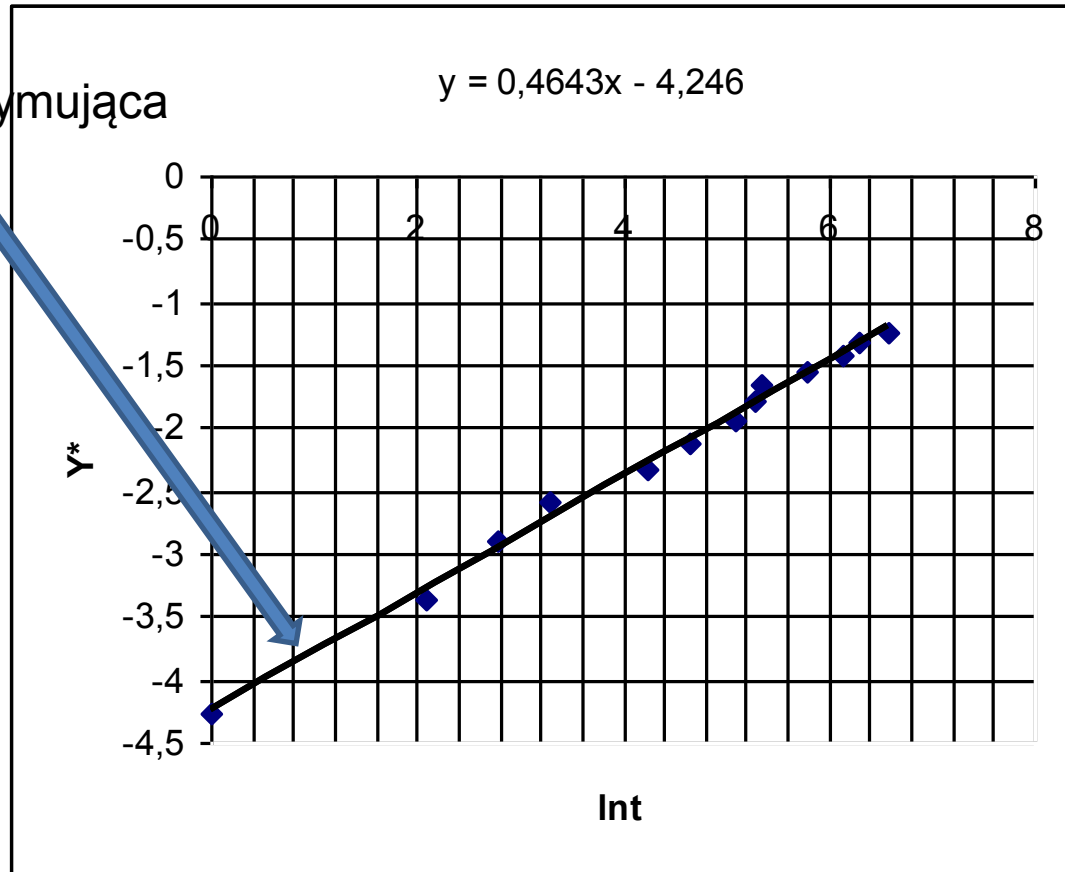
Funkcja aproksymująca powinna być określona na tym samym zbiorze argumentów, co funkcja aproksymowana.

Wykonanie aproksymacji wymaga:

- określenia funkcji aproksymowanej $y = f(x)$ – często funkcja dyskretna,
- określenia zbioru funkcji, z których wybieramy funkcję aproksymującą $y = F(x)$,
- minimalnego błędu aproksymacji.

Przykład aproksymacji

Funkcja aproksymująca

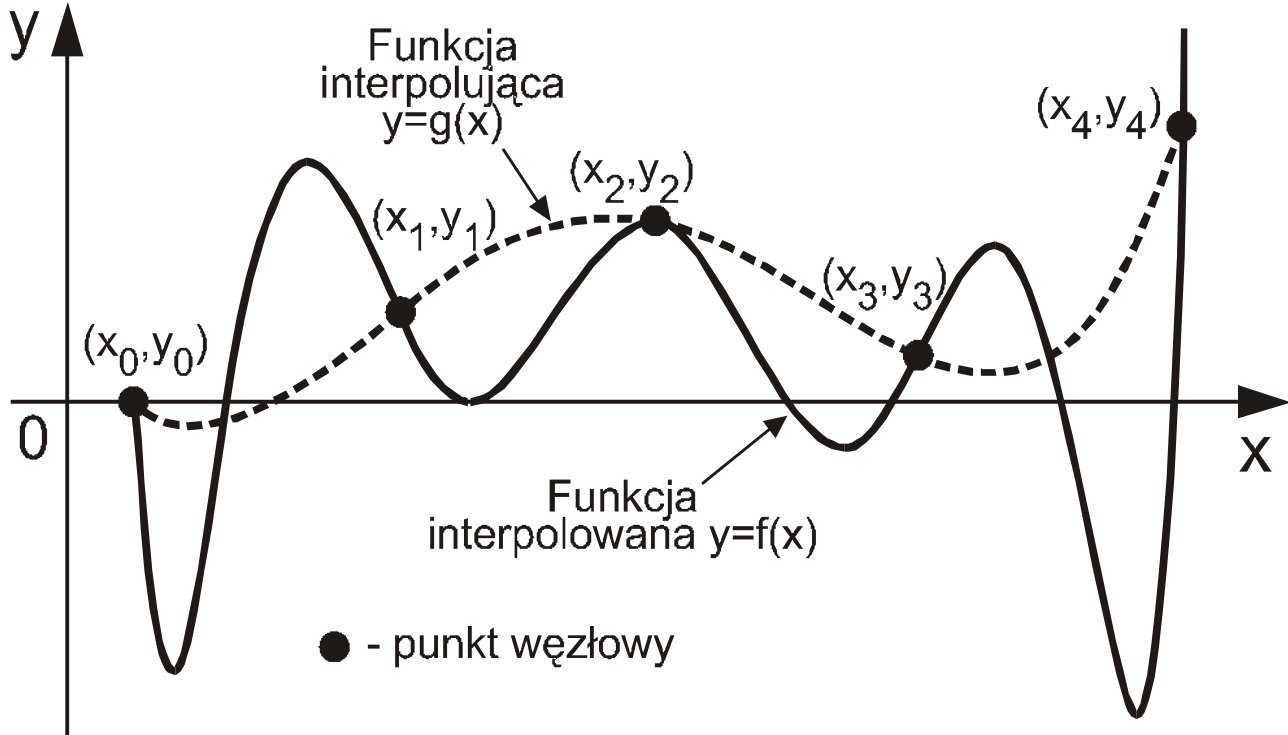


Aproksymacja polega na „dopasowaniu” funkcji aproksymującej do funkcji aproksymowanej, tak aby błąd przybliżenia był minimalny.

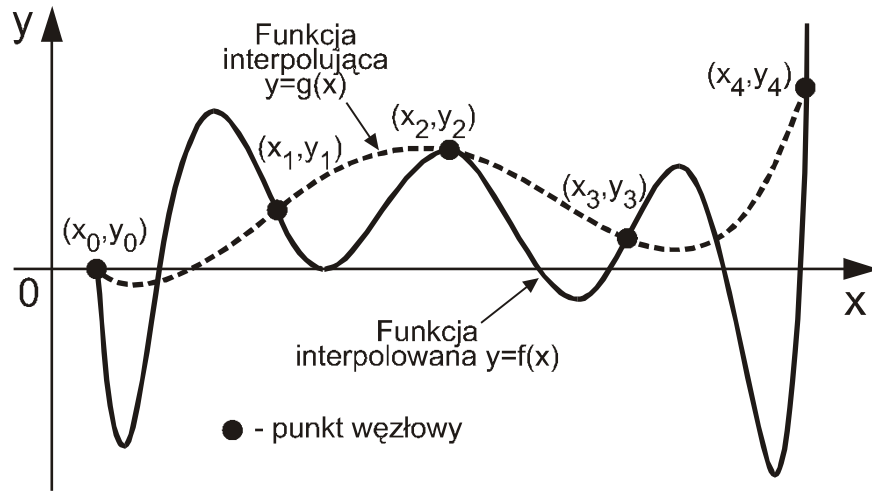
Funkcja aproksymująca może, ale nie musi przechodzić przez punkty $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, czyli przez **funkcję aproksymowaną**.

Interpolacja

Interpolacja jest szczególnym przypadkiem aproksymacji.



Aproksymacja funkcji, interpolacja funkcji



Dane są to wartości funkcji $f(x)$ zapisane jako

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Należy znaleźć funkcję $g(x)$ określonej klasy, która **przyjmuje w węzłach interpolacji te same wartości co funkcja interpolowana**

czyli

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$g(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Interpolacja: odcinkami, wielomianami potęgowymi Lagrange'a, wielomianami Newtona, różnicami skończonymi, funkcjami sklejanymi.

Interpolacja wielomianami Lagrange'a

Należy znaleźć dla danej funkcji $f(\cdot)$ taki wielomian potęgowy stopnia nie wyższego niż n oznaczanego przez $L_n(\cdot)$,

którego wartości w $n + 1$ zadanych punktach $x_i, y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$

są równe odpowiednim wartościom funkcji, co oznacza, że

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Punkty $x_i, y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$ \longrightarrow węzły interpolacji

Wielomiany Lagrange'a

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n (y_i L_i^{(n)}(x))$$

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Dla $n = 2$ $i = 0, 1, 2$ mamy

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Przykład:

	i	0	1	2
Dane:	x_i	0	1	2
	y_i	-1	0	3

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^2 (y_i L_i^{(2)}(x)) = y_0 L_0^{(2)}(x) + y_1 L_1^{(2)}(x) + y_2 L_2^{(2)}(x)$$

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-2x-x+2}{2} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x^2-2x}{-1}$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	-1	0	3

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \sum_{i=0}^2 (y_i L_i^{(2)}(x)) = y_0 L_0^{(2)}(x) + y_1 L_1^{(2)}(x) + y_2 L_2^{(2)}(x) \\ &= (-1) \frac{x^2 - 3x + 2}{2} + 0 \frac{x^2 - 2x}{1} + 3 \frac{x^2 - x}{2} = x^2 - 1 \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$x_0 = 0 \quad y_0 = -1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = 3$$

Aproksymacja funkcji na podzbiornie dyskretnym metodą najmniejszych kwadratów

Zakładamy, że znane są wartości

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

funkcji $f(\cdot)$ dla dyskretnych wartości argumentu równych

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Będziemy poszukiwać funkcji aproksymującej

$$y = \Phi(x)$$

w postaci wielomianu potęgowego:

$$\Phi(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + c_1 \cdot \varphi_1(x) + \dots + c_m \cdot \varphi_m(x)$$

gdzie: $\varphi_0(\cdot), \varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_m(\cdot)$

są pewnymi funkcjami określonymi na danym przedziale $[a, b]$,
są to funkcje bazowe (znane – jest to ciąg wielomianów):

$$x^0 = 1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$$

c_0, c_1, \dots, c_m są współczynnikami będącymi liczbami rzeczywistymi (niewiadome).

Aproksymacja funkcji, metoda najmniejszych kwadratów

$$S \cdot C = t$$

S – macierz współczynników,
 C – macierz niewiadomych,
 t – macierz wyrazów wolnych.

Układ równań, możemy zapisać:

$$\left. \begin{aligned} S_0 \cdot C_0 + S_1 \cdot C_1 + S_2 \cdot C_2 + \dots + S_m \cdot C_m &= t_0 \\ S_1 \cdot C_0 + S_2 \cdot C_1 + S_3 \cdot C_2 + \dots + S_{m+1} \cdot C_m &= t_1 \\ S_2 \cdot C_0 + S_3 \cdot C_1 + S_4 \cdot C_2 + \dots + S_{m+2} \cdot C_m &= t_2 \\ \dots & \\ S_m \cdot C_0 + S_{m+1} \cdot C_1 + S_{m+2} \cdot C_2 + \dots + S_{2m} \cdot C_m &= t_m \end{aligned} \right\}$$

gdzie $s_j = \sum_{i=0}^n x_i^j$, dla $j = 0, 1, 2, \dots, 2m$

m – stopień wielomianu potęgowego

$$t_k = \sum_{i=0}^n (x_i^k \cdot f(x_i)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

Aproksymacja funkcji, metoda najmniejszych kwadratów

Dla $m = 1$ mamy wyrażenia:

$$s_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 \quad s_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 \quad s_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2$$

$$t_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 \cdot y_i \quad t_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 \cdot y_i$$

Dla $m = 2$ mamy wyrażenia:

$$s_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 \quad s_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 \quad s_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 \quad s_3 = \sum_{i=0}^n x_i^3 \quad s_4 = \sum_{i=0}^n x_i^4$$

$$t_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 \cdot y_i \quad t_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 \cdot y_i \quad t_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 \cdot y_i$$

Aproksymacja funkcji, metoda najmniejszych kwadratów

Przykład 1:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0,8299	1,8839	1,7564	4,4367	5,2125	5,8896	7,0097

$m = 1$ – funkcja liniowa

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x$$

$$s_0 c_0 + s_1 c_1 = t_0$$

$$s_1 c_0 + s_2 c_1 = t_1$$



$$c_0, c_1$$

Aproksymacja funkcji, metoda najmniejszych kwadratów

n	0	1	2	3	4	5	6
x _i	1	2	3	4	5	6	7
y _i	0,8299	1,8839	1,7564	4,4367	5,2125	5,8896	7,0097

$$s_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 + 6^0 + 7^0 = 7$$

$$s_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 + 6^1 + 7^1 = 28$$

$$s_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$$

$$t_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 y_i = 1^0 \cdot 0,8299 + 2^0 \cdot 1,8839 + \dots + 7^0 \cdot 7,0097 = 27,019$$

$$t_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 y_i = 1^1 \cdot 0,8299 + 2^1 \cdot 1,8839 + \dots + 7^1 \cdot 7,0097 = 138,08$$

$$s_0 c_0 + s_1 c_1 = t_0$$

$$s_1 c_0 + s_2 c_1 = t_1$$

$$7c_0 + 28c_1 = 27,019$$

$$28c_0 + 140c_1 = 138,08$$

Z układu równań obliczamy:

$$c_0 = 0,4264 \quad \text{i} \quad c_1 = 1,0716$$

Funkcja aproksymująca:

$$\Phi(x) = -0,4264 + 1,0716x$$

Przykład 2:

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	-1	0	3

$m = 2$ – funkcja kwadratowa

$$s_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 = 0^0 + 1^0 + 2^0 = 3$$

$$s_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 = 0^1 + 1^1 + 2^1 = 3$$

$$s_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$$

$$s_3 = \sum_{i=0}^n x_i^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$$

$$s_4 = \sum_{i=0}^n x_i^4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 = 17$$

$$t_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 \cdot y_i = 0^0(-1) + 1^0(0) + 2^0(3) = 2$$

$$t_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 \cdot y_i = 0^1(-1) + 1^1(0) + 2^1(3) = 6$$

$$t_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 \cdot y_i = 0^2(-1) + 1^2(0) + 2^2(3) = 12$$

$$\Phi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

$$s_0c_0 + s_1c_1 + s_2c_2 = t_0$$

$$s_1c_0 + s_2c_1 + s_3c_2 = t_1$$

$$s_2c_0 + s_3c_1 + s_4c_2 = t_2$$

$$\longrightarrow c_0, c_1, c_2$$

$$3c_0 + 3c_1 + 5c_2 = 2$$

$$3c_0 + 5c_1 + 9c_2 = 6$$

$$5c_0 + 9c_1 + 17c_2 = 12$$

wynik

$$c_0 = -1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1$$

$$\Phi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 = -1 + 0x + 1x^2 = x^2 - 1$$