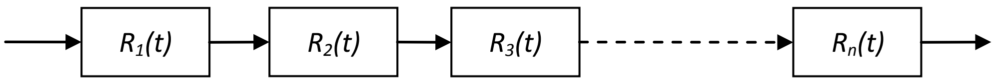
Modelowanie niezawodności prostych struktur sprzętowych

W ćwiczeniu tym przedstawione zostaną proste struktury sprzętowe oraz sposób obliczania ich niezawodności przy założeniu, że funkcja niezawodności bazuje na rozkładzie wykładniczym.

Struktura szeregowa

Najprostszą i prawdopodobnie najczęściej spotykaną strukturą w matematycznym modelowaniu niezawodności jest konfiguracja szeregowa. W strukturze tej poprawne działanie całego systemu zależne jest od poprawnego działania wszystkich elementów tego systemu. Przykład struktury szeregowej, przedstawionej za pomocą postaci blokowej, widnieje na rysunku 1. W celu uproszczenia modelu probabilistycznego takiego systemu zakłada się, że uszkodzenie każdego z elementów tego systemu jest statystycznie niezależne od działania lub uszkodzenia innych elementów. Dzięki takiemu podejściu nie trzeba stosować skomplikowanych obliczeń dla prawdopodobieństw warunkowych. Takie podejście jest ogólnie stosowane w praktyce.



Rys. 1. Struktura szeregowa

Przy dokonanym założeniu, funkcja niezawodności przedstawionej struktury szeregowej ma postać:

$$R_s(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot \ldots \cdot R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{1}$$

Ponieważ funkcja niezawodności bazować ma na rozkładzie wykładniczym, zatem współczynnik λ, będący intensywnością uszkodzeń, jest stały w czasie.
Stąd:

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{-\lambda_3 t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n t} = exp[-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t] = exp[-\lambda t] \tag{2}$$

gdzie:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = \frac{1}{\theta} \tag{3}$$

Intensywność uszkodzeń λ rozważanego systemu jest sumą intensywności uszkodzeń poszczególnych elementów tego systemu, stąd średni czas żywotności systemu wynosi $\theta = \frac{1}{\lambda}$.

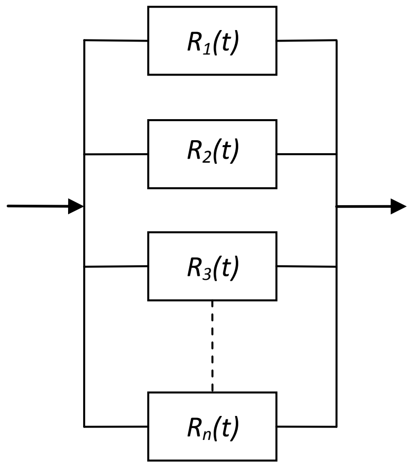
Rozważmy system składający się z 400 elementów i mających przyporządkowane wykładnicze funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Załóżmy także, że każdy z tych elementów ma niezawodność równą 0,99 dla określonego przedziału czasu t. Wówczas niezawodność całego systemu dla przedziału czasu t, na podstawie (1), wynosić będzie:

$$R(t) = 0{,}99^{400} = 0{,}018$$

co oznacza, że na 1000 takich systemów, 982 z nich przypuszczalnie zawiodą w przedziale czasu t.

Struktura równoległa

Kolejną często spotykaną w praktyce konfigurację sprzętu jest struktura równoległa, przedstawiona na rysunku 2. W strukturze tej, zakładając, że wszystkie elementy systemu działają w trybie „on-line", do uszkodzenia systemu dojdzie dopiero po uszkodzeniu wszystkich elementów tego systemu.



Rys. 2. Struktura równoległa

Zakładając, że:

$$\mathrm{Q_i} = 1 - R_i = 1 - e^{-\lambda_i t} \tag{4}$$

jest prawdopodobieństwem uszkodzenia (zawodności) każdego z elementów systemu, zawodność całego systemu może być wyrażona wówczas jako:

$$Q_s = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \ldots \cdot Q_n = \prod_{i=1}^{n} Q_i \tag{5}$$

Na tej podstawie niezawodność systemu można wyznaczyć ze wzoru:

$$\mathrm{R_s} = 1 - Q_s \tag{6}$$

Pamiętając, że $\mathrm{R + Q} = 1$.

Rozważmy przykładowy system składający się z pięciu elementów połączonych równolegle, każdy z niezawodnością wynoszącą 0,99. Wówczas dla pojedynczego elementu:

$$\mathrm{Q_i} = 1 - R_i = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

a dla całego systemu:

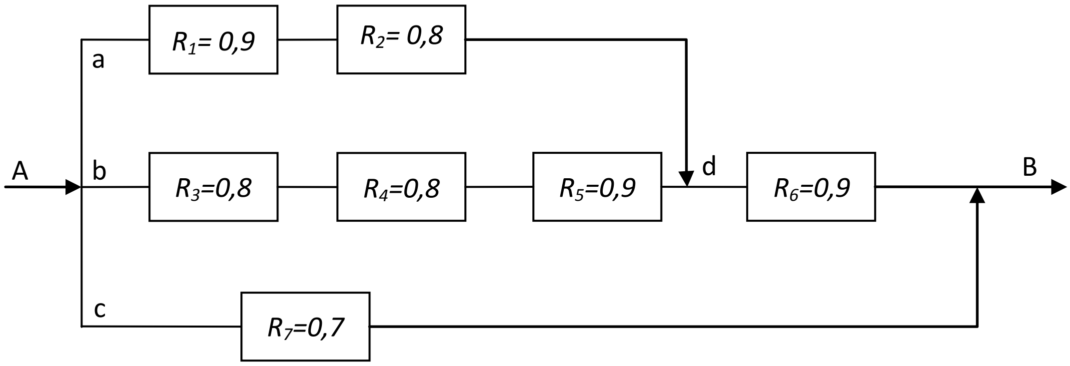
$$\mathrm{Q_s} = (0{,}01)^5 = 10^{-10} = 0{,}0000000001$$

$$\mathrm{R_s} = 1 - Q_s = 0{,}9999999999$$

Porównując wyniki uzyskane dla struktur szeregowych i równoległych stwierdzić można jednoznacznie, że większą niezawodność posiadają właśnie te drugie. Struktury takie często nazywa się także redundantnymi. Umożliwiają uzyskanie bardzo dużej niezawodności systemu bądź podsystemu, o wiele większej niż dla pojedynczych elementów je tworzących.

Struktura mieszana

W praktyce spotyka się układy zbudowane z elementów połączonych szeregowo oraz równolegle. Przykład pokazany na rysunku 3.



Rys. 3. Struktura szeregowo-równoległa

Aby poznać niezawodność całego przedstawionego powyżej układu, należy dokonać dekompozycji systemu krok po kroku oraz posługiwać się odpowiednimi relacjami dla połączeń szeregowych oraz równoległych.

Przykład rozwiązania:

$$R_{ad} = R_1 \cdot R_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$$

$$R_{bd} = R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}576$$

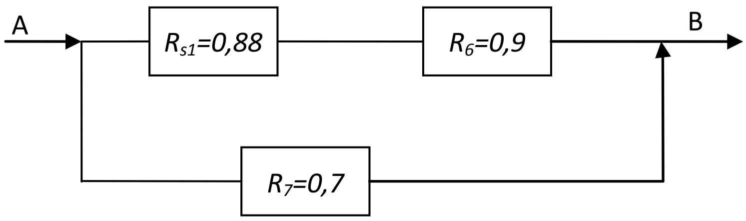
ponieważ R_{ad} oraz R_{bd} są połączone równolegle, zatem:

$$Q_{s1} = Q_{ad} \cdot Q_{bd} = (1 - R_{ad}) \cdot (1 - R_{bd}) = (1 - 0{,}72) \cdot (1 - 0{,}576) = 0{,}28 \cdot 0{,}424 = 0{,}119$$

Stąd niezawodność wynosi:

$$R_{s1} = 1 - Q_{s1} = 1 - 0{,}119 = 0{,}88$$

W tym momencie układ został zdekomponowany do postaci:



Rys. 4. Przykładowa struktura po dekompozycji

Licząc dalej otrzymamy:

$R_{s2} = R_{s1} \cdot R_6 = 0{,}88 \cdot 0{,}9 = 0{,}792$

$Q_{s2} = 1 - R_{s2} = 1 - 0{,}792 = 0{,}208$

$Q_7 = 1 - R_7 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Mając połączenie równoległe skorzystamy ze wzoru:

$Q_{AB} = Q_{s2} \cdot Q_7 = 0{,}208 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

Stąd całkowita niezawodność przykładowego systemu ma wartość:

$R_{AB} = 1 - Q_{AC} = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

<u>Struktura k z n</u>

System składający się z n elementów, dla którego poprawnej pracy wymagana jest liczba k pracujących elementów nazywany jest strukturą k z n (gdzie k < n).

a) *Elementy składowe systemu są identyczne*

W celu uproszczenia obliczeń, zakłada się, że wszystkie elementy systemu są identyczne, działają jednocześnie oraz ich uszkodzenia są statystycznie niezależne. Wtedy:

R – niezawodność jednego elementu dla określonego przedziału czasu
Q – zawodność jednego elementu dla określonego przedziału czasu

oraz $R + Q = 1$

Dla n elementów:

$$(R+Q)^n = R^n + nR^{n-1}Q + \frac{n(n-1)}{2!}R^{n-2}Q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}R^{n-3}Q^3 + \ldots + Q^n = 1 \qquad (7)$$

W przykładowej strukturze, w której istnieją 4 elementy, dla określonego przedziału czasu t:

$(R+Q)^4 = R^4 + 4R^3Q + 6R^2Q^2 + 4RQ^3 + Q^4 = 1$

wartości prawdopodobieństw wynosić będą odpowiednio:

$P(wszystkie\ 4\ będą\ działać) = R^4$

$P(dokładnie\ 3\ będą\ działać) = 4R^3Q$

$P(dokładnie\ 2\ będą\ działać) = 6R^2Q^2$

$P(dokładnie\ 1\ będzie\ działać) = 4RQ^3$

$P(wszystkie\ się\ popsują) = Q^4$

Ponieważ interesuje nas przypadek, gdy k z n elementów będzie działać, otrzymujemy:

$P(przynajmniej\ 3\ będą\ działać) = R^4 + 4R^3Q = 1 - 6R^2Q^2 - 4RQ^3 - Q^4$

$P(przynajmniej\ 2\ będą\ działać) = R^4 + 4R^3Q + 6R^2Q^2 = 1 - 4RQ^3 - Q^4$

$P(przynajmniej\ 1\ będzie\ działać) = R^4 + 4R^3Q + 6R^2Q^2 + 4RQ^3 = 1 - Q^4$

Jeżeli przyjmie się wartość niezawodności 0,9 dla czasu t dla każdego elementu, to struktura 3 z 4 będzie miała niezawodność równą:

$R_s = R^4 + 4R^3Q = (0{,}9)^4 + 4(0{,}9)^3(0{,}1) = 0{,}6561 + 0{,}2916 = 0{,}9477$

b) *Elementy składowe systemu są różne*

W przypadku budowy struktury systemu k z n z elementów posiadających różne wartości niezawodności, analiza staje się trudniejsza.

Rozważmy przykładowy system, który składa się z trzech elementów z niezawodnością odpowiednio R_1, R_2 oraz R_3.

Wówczas:

$$(R_1 + Q_1)(R_2 + Q_2)(R_3 + Q_3) = 1 \quad (8)$$

Powyższe równanie można rozwinąć, jak to miało w przypadku analizy jednakowych elementów w strukturze nadmiarowej. Innym, dosyć intuicyjnym oraz prostym sposobem jest zbudowanie specjalnej tablicy prawdy. Dla rozpatrywanej struktury będzie ona miała postać:

1	2	3		
0	0	0	$Q_1Q_2Q_3$	wszystkie trzy uszkodzone
0	0	1	$Q_1Q_2R_3$	1 i 2 uszkodzone, 3 działa
0	1	0	$Q_1R_2Q_3$	1 i 3 uszkodzone, 2 działa
0	1	1	$Q_1R_2R_3$	1 uszkodzony, 2 i 3 działają
1	0	0	$R_1Q_2Q_3$	2 i 3 uszkodzone, 1 działa
1	0	1	$R_1Q_2R_3$	2 uszkodzony, 1 i 3 działają
1	1	0	$R_1R_2Q_3$	3 uszkodzony, 1 i 2 działają
1	1	1	$R_1R_2R_3$	wszystkie trzy działają

Jeżeli nie jest ważne, który dokładnie element ulega uszkodzeniu, można na postawie tej tablicy wyprowadzić równanie na niezawodność systemu przy co najmniej 1, 2 lub 3 działających elementach. Przykładowo:

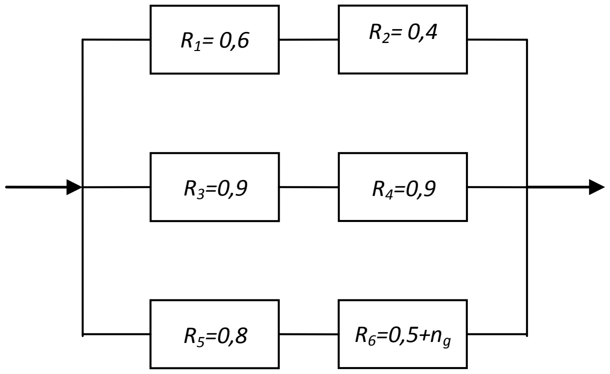
$P(przynajmniej\ 2\ będą\ działać) = R_1R_2R_3 + R_1R_2Q_3 + R_1Q_2R_3 + Q_1R_2R_3$

Zadania

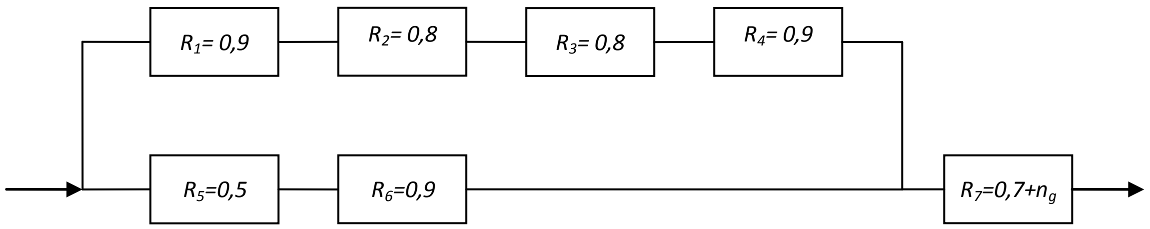
Wszystkie przedstawione poniżej zadania należy wykonać poprzez analityczne obliczenia, zgodnie z teorią podaną w niniejszym opracowaniu. W sprawozdaniu, oprócz wyniku końcowego dla każdego zadania, musi znaleźć się również opis jego wykonania (np. wartości składowe niezawodności dla każdej z gałęzi systemu).

W obliczeniach należy przyjąć wartość: n_g = 0,01 * (numer grupy laboratoryjnej).

1. Obliczyć niezawodność podanej struktury:



2. Obliczyć niezawodność podanej struktury:



3. Obliczyć niezawodność struktury 2 z 3 zbudowanej z jednakowych elementów.
   Do obliczeń przyjąć R=0,6+n_g

4. Obliczyć niezawodność struktury 2 z 3 zbudowanej z różnych elementów.
   Do obliczeń przyjąć R_1=0,7; R_2=0,8; R_3=0,85+n_g

5. Obliczyć niezawodność struktury 2 z 4 zbudowanej z jednakowych elementów.
   Do obliczeń przyjąć R=0,8+n_g

6. Obliczyć niezawodność struktury 3 z 4 zbudowanej z różnych elementów.
   Do obliczeń przyjąć R_1=0,7; R_2=0,8; R_3=0,85; R_4=0,65+n_g

7. Obliczyć niezawodność struktury z zadania 1, przy założeniu wartości λ oraz t:
   t = 1 rok
   $\lambda_1 = 1{,}00 * 10^{-5}$ [uszk/h]
   $\lambda_2 = 1{,}00 * 10^{-6}$ [uszk/h]
   $\lambda_3 = 5{,}00 * 10^{-5}$ [uszk/h]
   $\lambda_4 = 5{,}00 * 10^{-6}$ [uszk/h]
   $\lambda_5 = 1{,}00 * 10^{-4}$ [uszk/h]
   $\lambda_6 = (3{,}00 + n_g) * 10^{-5}$ [uszk/h]

8. Obliczyć niezawodność struktury z zadania 2, przy założeniu wartości λ oraz t:
   t = 1 rok
   $\lambda_1 = 1{,}00 * 10^{-5}$ [uszk/h]
   $\lambda_2 = 1{,}00 * 10^{-6}$ [uszk/h]
   $\lambda_3 = 5{,}00 * 10^{-5}$ [uszk/h]
   $\lambda_4 = 5{,}00 * 10^{-6}$ [uszk/h]
   $\lambda_5 = 1{,}00 * 10^{-4}$ [uszk/h]
   $\lambda_6 = 3{,}00 * 10^{-5}$ [uszk/h]
   $\lambda_7 = (2{,}00 + n_g) * 10^{-5}$ [uszk/h]