POLITECHNIKA GDAŃSKA
CENTRUM NAUCZANIA MATEMATYKI
I KSZTAŁCENIA NA ODLEGŁOŚĆ

OD SZKOLNIAKA DO ŻAKA

klasy 7 i 8 szkoły podstawowej

rok szkolny 2019/2020

Rozwiązania – etap I

Zadanie 1. Porównaj liczby: $a=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$ i $b=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{128}$.

Rozwiązanie Mamy kolejno:

$$a=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[3]{27\cdot 2}\overset{!}{=}\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}\overset{!}{=}5\sqrt[3]{2}$$

oraz:

$$b=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{64\cdot 2}\overset{!}{=}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{2}\overset{!}{=}\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}\overset{!!}{=}5\sqrt[3]{2};$$

zatem: $a=b.$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
Centrum Nauczania Matematyki
I Kształcenia na Odległość
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Osoba do kontaktu:

mgr inż. Dorota Żarek
tel.; 58 348 61 86
e-mail: dorota.zarek@pg.gda.pl

Zadanie 2. Szewczyk Dratewka, po pokonaniu smoka, zgłosił się do króla, który obiecał mu rękę swojej córki. Król jednak nie chciał spełnić obietnicy i powiedział: *„Moja jedyna córka zostanie twoją żoną, jeśli podasz mi poprawną wartość liczby:* $a = 2009\frac{11}{13} \cdot 2010\frac{11}{13} - 2008\frac{11}{13} \cdot 2011\frac{11}{13}$*.”* Jeszcze tego samego dnia księżniczka została żoną szewczyka. Jaką wartość a podał królowi szewczyk?

Rozwiązanie Oznaczmy: $x = 2008\frac{11}{13}$. Wtedy:

$$a = 2009\frac{11}{13} \cdot 2010\frac{11}{13} - 2008\frac{11}{13} \cdot 2011\frac{11}{13} = (x+1)(x+2) - x(x+3) =$$
$$= x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 3x = 2.$$

Odpowiedź Wartość liczby a, podana przez szewczyka, była równa 2.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
CNMiKnO
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Osoba do kontaktu:
mgr Dorota Żarek
tel.; 58 348 61 86
e-mail: dorota.zarek@pg.gda.pl

Zadanie 3. Suma czterech liczb jest równa 19. Druga liczba jest 3 razy większa od pierwszej. Trzecia liczba jest o 5 większa od sumy dwóch pierwszych liczb. Czwarta liczba jest średnią arytmetyczną drugiej i trzeciej liczby. Wyznacz te liczby.

Rozwiązanie Szukane liczby to kolejno: $x, y, z, w,$ gdzie:

$$\begin{cases} y = 3x & \textbf{(1)} \\ z = x + y + 5 & \textbf{(2)} \\ w = \dfrac{y+z}{2} & \textbf{(3)} \\ x + y + x + w = 19 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Z równań **(1)** i **(2)** mamy: $z = x + 3x + 5 = 4x + 5.$ **(*)**

Wtedy

$$w \underset{(3)}{=} \frac{y+z}{2} \underset{z\,(1)\,\mathrm{i}\,(*)}{=} \frac{3x+4x+5}{2} = \frac{7x+5}{2} \qquad \textbf{(**)}$$

Wtedy:

$$19 \underset{z(4)}{=} x + y + z + w \underset{z(1),(*),(**)}{=} x + 3x + (4x+5) + \frac{7x+5}{2} \qquad /\cdot 2$$

$$\Downarrow$$

$$2x + 6x + (8x+10) + 7x + 5 = 38$$
$$23x + 15 = 38$$
$$23x = 23$$
$$x = 1$$
$$\Downarrow$$

$$y = 3 \cdot 1 = 3$$
$$z \overset{z(*)}{=} 4 \cdot 1 + 5 = 9$$
$$w \overset{z(**)}{=} \frac{7 \cdot 1 + 5}{2} = 6.$$

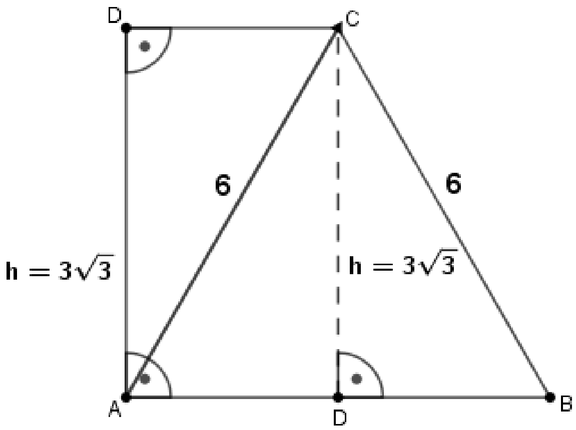
Odpowiedź Szukane liczby to: $x = 1,\ y = 3,\ z = 9,\ w = 6.$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
CNMiKnO
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Osoba do kontaktu:
mgr Dorota Żarek
tel.; 58 348 61 86
e-mail: dorota.zarek@pg.gda.pl

Zadanie 4. W trapezie prostokątnym ABCD krótsza przekątna AC dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa AB trapezu ma długość 6 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

Rozwiązanie



Z warunków zadania mamy: $6\,\text{cm} = |AB| \overset{!}{=} |AC| \overset{!}{=} |BC|$

oraz:

$$|DC| \overset{!!}{=} |AD| = \frac{1}{2}\cdot 6\,\text{cm} = 3\,\text{cm};$$

$$h = \frac{|AB|\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm};$$

$$|AD| \overset{!}{=} h = 3\sqrt{3}\ \text{cm};$$

Z powyższych równości mamy:

$$\text{Obw}_{ABCD} = |AB| + |BC| + |CD| + |AD| = 6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}\ \text{(cm)};$$

oraz:

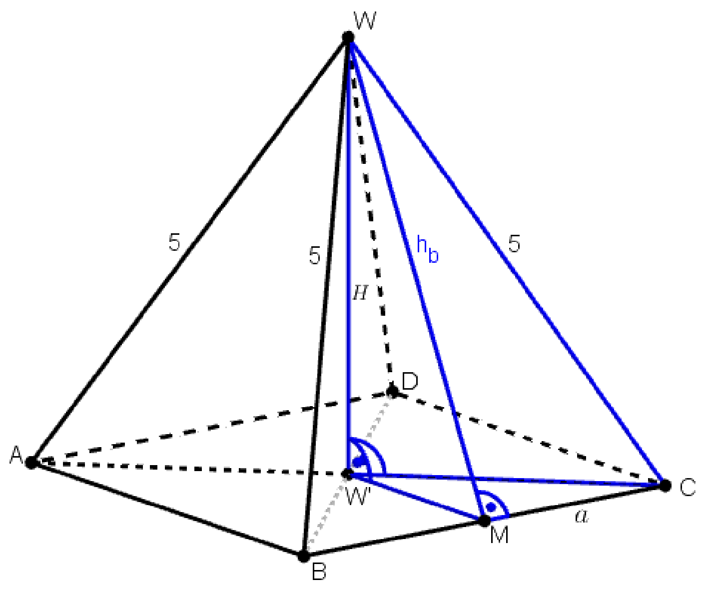
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot(|AB| + |DC|)\cdot h = \frac{1}{2}(6+3)\cdot 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3\sqrt{3} = \frac{27}{2}\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
CNMiKnO
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Osoba do kontaktu:
mgr Dorota Żarek
tel.; 58 348 61 86
e-mail: dorota.zarek@pg.gda.pl

Zadanie 5. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm, a krawędź boczna jest równa 5 cm. Oblicz pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie



Mamy: $|W'C| = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm;

Z Twierdzenia Pitagorasa dla $\Delta CW'W$ mamy:

$$H^2 + (3\sqrt{2})^2 = 5^2 \Rightarrow H^2 = 25 - 18 = 7 \Rightarrow H = \sqrt{7} \text{ cm;}$$

wtedy:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3}\cdot 6^2 \cdot \sqrt{7} = \frac{1}{3}\cdot 36\sqrt{7} = 12\sqrt{7} \quad (\text{cm}^3).$$

Z Twierdzenia Pitagorasa dla $\Delta W'MW$ mamy:

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (h_b)^2 \Rightarrow (h_b)^2 = (\sqrt{7})^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 7 + 9 = 16 \Rightarrow h_b = \sqrt{16} = 4 \text{ cm;}$$

i wtedy:

$$P_b = 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h_b = 2\cdot 6\cdot 4 = 48 \ (\text{cm}^2)$$

$$+ \quad P_p = a^2 = 6^2 = 36 \, (\text{cm}^2).$$

$$P_c = 48\,(\text{cm}^2) + 36\,(\text{cm}^2) = 84\,\text{cm}^2.$$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
CNMiKnO
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Osoba do kontaktu:
mgr Dorota Żarek
tel.; 58 348 61 86
e-mail: dorota.zarek@pg.gda.pl