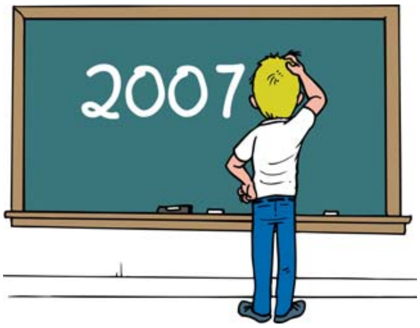


Kącik matematyczny

Każdy Nowy Rok skłania nas zwykle do refleksji. Zastanawiamy się, jaki on będzie i co się zmieni. A tak naprawdę co oznacza liczba 2007? Będziemy przecież z nią żyli przez cały rok. Wszystko to oczywiście zależy od naszej wiedzy. Możemy próbować zastanawiać się nad właściwościami tej liczby albo możemy szukać informacji we wróżbach, na przykład w numerologii. Sądzę więc, że i w kąciku matematycznym nadszedł czas na liczby, oczywiście bez wielkich teorii matematycznych.

Cyfrowe życie – liczbowy świat

Z liczby powstaje harmonia. Niebo całe jest harmonią i liczbą. Harmonia kształtów jest pięknem, harmonia życia cnotą, harmonia myśli mądrością. Pitagoras

Matematyka jest królową nauk, a teoria liczb jest królową matematyki. C. F. Gauss

W całej historii ludzkości liczba i liczby wywierały wpływ na życie, kulturę i język. Z badań archeologicznych wynika, że potrzeby liczenia występowały od początku naszego bytu. Na znalezionej kości wilka sprzed 30 000 lat znajdował się szereg naciętych karbów. To świadczy, że ówcześni ludzie coś liczyli. Kość wilka w epoce kamienia była takim sobie „komputerem". Zresztą historia różnorodnych odkryć ciągle nas zaskakuje. Ostatnio pisze się o „Stomachionie", części kopii dzieł Archimedesa (III w. p.n.e.). Analizując to dzieło, dr Reviel Netz (historyk matematyki) ze Stanford University ustalił, że Archimedes próbował rozwiązać pewien problem ze współczesnej kombinatoryki. W swoich zapiskach zamieścił zadanie o następującej treści: „Na ile sposobów można ułożyć 14 różnych trójkątów, by otrzymać kwadrat?" Jest to typowe pytanie z kombinatoryki – działu matematyki, który uważa się, że powstał w czasach obecnych. Koledzy dr Netza rozwiązali ten problem używając dobrych komputerów i otrzymali 170152 rozwiązania. Jak obliczał to Archimedes? Fakt ten świadczy, że korzenie matematyki, nawet tej zaawansowanej, są głębokie.

Książek i artykułów poświęconych liczbom (i to bardzo dobrych) jest ogromna ilość, dlatego nie mam zamiaru pisać dodatkowej rozprawy na ten temat. Chcę tylko zwrócić uwagę na pewne aspekty liczbowe oraz na to, jak mocno istnieją one w naszym bycie, szczególnie w czasach współczesnych, gdy tak ogromny rozwój techniki decyduje, że nasze życie można nazwać „cyfrowym życiem". W praktyce liczby sterują naszym życiem (komputery, telefony komórkowe itp.). Pewną motywację do przedstawionych tu rozważań dały mi dwie historie życiowe. Pierwszą z nich jest zabawna scena z filmu, który dawno temu oglądałam. Nauczyciel matematyki został nagle zapytany przez mocno znudzonego ucznia „Dlaczego on ma się uczyć tej matematyki". No i wtedy nauczyciel odpowiedział: „Wyobraź sobie, że od jutra nie ma liczb, po prostu znikają. To oznacza, że nie działają żadne telefony komórkowe". Okazało się to najlepszą argumentacją dla tego młodego człowieka. Stwierdził wówczas, że chyba coś w tej matematyce jest i trzeba się jej uczyć.

Tak naprawdę to żyjemy z liczbami i wśród liczb. Na ogół nie zwracamy na to uwagi (to tak jak z oddychaniem). Codziennie spotykamy się z nimi w różnych miejscach i różnych sytuacjach. Mają one także swoją „ciemną" stronę. Potwierdza to druga historia, która zdarzyła się niedawno na moich zajęciach. Usłyszałam od swojego studenta, że on ma dość bycia PESEL-em, NIP-em czy numerem indeksu. On chciałby być po prostu np. Jackiem Kowalskim. Jesteśmy jednak obywatelami „zanumerowanymi" i trudno jest czasami pogodzić się z tym. No cóż, każdy nadmiar jest szkodliwy. Od liczb jednak nie uwolnimy się. Wobec tego należy je poznać dobrze, zaprzyjaźnić się z nimi, a także umiejętnie wykorzystać.

Moje rozważania rozpocznę od tzw. liczb naturalnych **1, 2, 3, 4, 5, 6,…,** to jest takich, z którymi spotykamy się najwcześniej. Są to bardzo szczególne liczby, mające chyba też najdłuższą historię. Niektórzy twierdzili, tak jak L. Kronecker (1823–1891), że są one dziełem Boga. Znane jest jego powiedzenie „Bóg stworzył liczby naturalne, wszystko inne stworzyli ludzie". Faktem jest, że występują od zarania dziejów. Ponadto można powiedzieć, że zostały one stworzone do przeliczania przedmiotów w różnych zbiorowiskach. Nie mają one nic wspólnego z cechami liczonych przedmiotów (tj. tak samo traktujemy fakt, że jest np. 6 gruszek, jak i 6 jabłek – po prostu jest ich 6).

Najważniejsza właściwość tych liczb, to możliwość dodawania i mnożenia ich. Teoria liczb naturalnych zawiera pewne prawa tych działań. Stały się one też podstawą dla działań w innych zbiorach liczbowych (i nie tylko). Chcąc wykonać wymienione działania, wkraczamy na teren sposobu przedstawienia liczb naturalnych. Wymaga to użycia odpowiedniego systemu pozycyjnego. Wynalezienie pisowni pozycyjnej jest przypisywane Sumeryjczykom lub Babilończykom, zaś jego rozpowszechnienie – Hindusom.

System pozycyjny ma tę dogodną własność, że każda liczba, dowolnie mała czy dowolnie duża, może być zapisana przy użyciu pewnej ilości symboli cyfrowych. W systemie używanym od dawna, tzw. systemie dziesiętnym, używa się symboli jednocyfrowych **0, 1, 2, 3, 4, 5 , 6, 7, 8, 9**. Użycie dziesięciu jako podstawy liczenia wiąże się z faktem, że mamy 10 palców, na których możemy liczyć. Znałam osobę, która dodawała i mnożyła na palcach dość duże liczby, w jej tylko znany sposób.

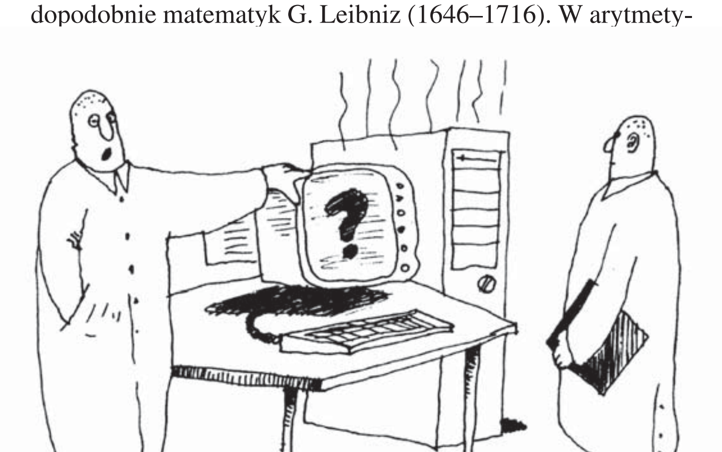
Liczby większe liczby niż **9** oznacza się liczbami wielocyfrowymi, np. trzysta siedemdziesiąt dwa, to $\mathbf{300 + 70 + 2 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0}$ (gdzie $\mathbf{10^0 = 1}$, $\mathbf{10^1 = 10}$, $\mathbf{10^2 = 10 \cdot 10 = 100}$) i oznacza w systemie dziesiętnym **372**. Ważne jest przy tym, że znaczenie symboli cyfrowych **3, 7, 2** zależy od ich pozycji i odpowiada miejscu jednostek, dziesiątek czy setek. Tak więc **372** to liczba złożona z cyfr **3, 7, 2**, a nie cyfra, jak często mówią w „telewizorze". A zdarza się, że mówią też o cyfrze bezwzględnej, co jest już bezwzględnym brakiem wiedzy.

Za pomocą tego zapisu pozycyjnego możemy napisać każdą liczbę naturalną, posługując się tylko dziesięcioma symbolami cyfrowymi w różnych kombinacjach. Ogólna reguła mówi, że liczbę naturalną przedstawiamy w postaci potęg liczby **10**, np. $z = a\cdot 10^2 + b\cdot 10^1 + c\cdot 10^0$, gdzie cyfry **a, b, c** są odpowiednio jedną z cyfr od zera do dziewięciu. Liczbę z zapisujemy za pomocą skróconego zapisu **abc**. Stąd też $2007 = 2\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0$. Jak widać, w systemie dziesiętnym liczba **10** jest szczególnie wyróżniona jako tzw. podstawa systemu. Okazuje się, że liczba **10** nie jest istotna i można użyć jako podstawy innej liczby. O istnieniu tych innych podstaw świadczą liczebniki w wielu językach obcych. W systemach innych niż dziesiątkowy reguły arytmetyczne są takie same. Należy stosować tylko inne tabliczki do dodawania i mnożenia liczb jednocyfrowych.

W obecnych czasach szczególną rolę zaczął odgrywać system pozycyjny o podstawie **2**. Jedynymi cyframi w tym systemie są **0** i **1**. Każdą liczbę naturalną można przedstawić ciągiem złożonym z tych symboli. Jedyną wadą tego systemu jest fakt, że przedstawienie nawet niewielkich liczb wymaga długich wyrażeń (potęgi **2**) np. $71 = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ (tu $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 2\cdot 2 = 4$, $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$, $2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ itd.). Stąd w systemie dwójkowym **71** zapisuje się **1000111**. Jak widać, jest to dość długa postać. Nawet liczby początkowe zapisuje się wieloma symbolami np. $4 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$ tj. **100, czy** $8 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$ tj. **1000**.

System dwójkowy odegrał jednak ogromną rolę w rozwoju informatyki. Podstawę obliczeń cyfrowych stanowią bity. Bit to najmniejszy element składowy DNA informacji. Ma dwa stany istnienia: włączony/wyłączony, prawda/fałsz, tak/nie. Z powodów praktycznych jego stany oznaczamy 0 i 1, a stąd jesteśmy już w systemie dwójkowym. Obecnie można już przetworzyć na postać cyfrową coraz więcej rodzajów informacji takich jak zapis dźwiękowy i wideo, nadając im postać ciągu zer i jedynek. No i mamy cyfrowe życie.

Szczególne zamiłowanie do systemu dwójkowego miał prawdopodobnie matematyk G. Leibniz (1646–1716). W arytmetyce dwójkowej Leibniz widział obraz stworzenia świata. Wyobrażał sobie, że jedność przedstawiała Boga, a zero nicość. Najwyższy zaś stworzył wszystko z nicości, tak jak jedność i zero wyrażają wszystkie liczby w tym systemie.



On twierdzi, że $2^{756839}-1$ jest ostatnią liczbą pierwszą, więcej jego pamięć nie mieści. (źródło rys.: K. Ciesielski, Z. Pogoda „Diamenty matematyki")

Wśród liczb naturalnych tak wyróżniają się, jak i odgrywają ogromną rolę liczby pierwsze. Aby je określić, należy przypomnieć, co to znaczy, że liczba naturalna **b** jest podzielna przez liczbę naturalną **a**. Mówimy więc, że liczba **b** jest podzielna przez **a** (albo b jest wielokrotnością **a**), jeżeli istnieje liczba naturalna **c** taka, że $b = a\cdot c$. Stąd np. **8** jest podzielne przez **4**, ponieważ $8 = 4\cdot 2$. Liczby pierwsze, to liczby naturalne większe od 1, które są podzielne tylko przez 1 i przez samą siebie. Początkowymi liczbami pierwszymi są **2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23,...**. Liczby pierwsze nie byłyby tak ważne, gdyby nie pewien wynik znany jako podstawowe twierdzenie arytmetyki, Mówiono, że dowolna liczba naturalna różna od 1 może być zapisana w postaci iloczynu liczb pierwszych w jeden i tylko jeden sposób. Wynika stąd, że liczby pierwsze są podstawowymi „cegiełkami", z których są zbudowane liczby naturalne. Ważna jest tu jedyność tego rozkładu. Jeżeli ktoś stwierdził, że liczbę 92365 można przedstawić w postaci iloczynu $5\cdot 7\cdot 7\cdot 13\cdot 29$, to ktoś pracujący nad tą samą liczbą w tym samym budynku czy nawet na innym kontynencie otrzymał ten sam wynik.

Jest jeszcze inny współczesny wynik wyróżniający liczby pierwsze. W 1977 r. trzej matematycy amerykańscy: R. Rivest, A. Shamir i L. Adelman w opublikowanym artykule pt. „Metoda uzyskiwania sygnatur cyfrowych a systemy szyfrowania z kluczem publicznym" wykorzystali teorię liczb pierwszych. W XVIII w. Euler odkrył pewną interesującą właściwość potęgowania. Udowodnił, że dla dowolnej liczby naturalnej **N** liczba postaci $N^{(p-1)(q-1)+1}-N$ (gdzie **p**, **q** – liczby pierwsze) jest zawsze wielokrotnością iloczynu tych dwóch liczb pierwszych **p**, **q**, a więc wielokrotnością p·q. Na przykład biorąc $p = 2$, $q = 3$, mamy, że N^3-N jest wielokrotnością liczby $2\cdot 3 = 6$, czy też dla $p = 3$, $q = 5$ mamy, że N^9-N jest wielokrotnością liczby **15**.

Euler byłby zdumiony gdyby dowiedział się, że jego twierdzenie stanie się podstawą do zbudowania tajnego szyfru.

Jeżeli szyfr ten ma być używany np. w banku, to bank wybiera 2 duże liczby pierwsze **p, q** (co najmniej 75-cyfrowe). Następnie oblicza się ich iloczyn, który jest liczbą co najmniej 150-cyfrową, którą nazywa się kluczem publicznym. Klucz ten bank podaje swoim klientom, nie ujawniając jednak, jakie liczby pierwsze zostały użyte. Klienci używają klucza do zaszyfrowania komunikatu przekazywanego do banku. Aby złamać szyfr, trzeba znaleźć te 2 liczby pierwsze, których iloczyn jest gigantyczną liczbą. Oznacza to szukanie podzielników liczby 150-cyfrowej. W 1977 r. uważano, że taka liczba jest na tyle duża, że nie uda się znaleźć jej podzielników przez wieki. Komputery stają się jednak szybsze, jak i powstają nowe techniki wyszukiwania podzielników. Nigdy nic nie wiadomo, może nie wystarczą liczby 150-cyfrowe. To zdumiewające, że w epoce komputera nasze tajemnice zaszyfrowuje się, używając liczb pierwszych.

Liczby pierwsze odgrywały i odgrywają też pewną rolę mistyczną. Można je znaleźć w książkach Petera Plichty *„Krzyż liczb pierwszych"* czy *„Tajemnicza formuła Boga – kod liczb pierwszych kluczem do rozwiązania zagadek świata"*.

Od niepamiętnych czasów ludzie usiłują poznać świat i swoje miejsce w tym świecie. Chcą znaleźć też sposób na odkrycie swojej przyszłości i możliwość wykorzystania tej wiedzy. Powstały więc różne teorie, które nie zawsze miały charakter naukowy. Niektóre z nich wykorzystują liczby w bardzo różnorodny sposób. Są to astrologia, teoria biorytmów czy numerologia. W tej ostatniej liczby odgrywają zasadniczą rolę. Numerologia jest to stara praktyka wróżenia. Polega ona na przypisywaniu literom wartości liczbowych, a następnie upatrywaniu w otrzymanej liczbie znaczenia życiowego. Ten sposób wróżenia występował już w społecznościach starożytnych i średniowiecznych. Obecnie, gdy mamy „powrót do natury”, numerologia nabrała znaczenia. Świadczy o tym liczba artykułów w prasie pod koniec roku, próbujących przewidzieć przyszłość.

Numerologia posługująca się liczbami ma za zadanie określić osobowość człowieka, jak i analizować to, co było, jest i będzie. W tym wszystkim okazuje się, że mając odpowiednią książkę z numerologii, kalkulator lub komputer, możemy sobie sami powróżyć. Każdemu z nas (według tej teorii) od początku życia towarzyszą data i miejsce narodzin, imię i nazwisko, a to stanowi kod naszego życia. Trzeba tylko go rozszyfrować. Niestety, nie uwzględniono jeszcze PESEL-u, NIP-u, czy innych charakterystyk liczbowych każdego z nas. Teoria ta ma więc szansę rozwoju. A tak dla zabawy, podaję wersję polską tabelki używanej w numerologii:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	G	H	I
J	K	L,Ł	M	N	O	P	Q	R
S	T	U	V	W	X	Y	Z,Ż	-

I tak np. **ANNA** będzie miała cyfrę osobistą **1 + 5 + 5 + 1 = 12 = 1 + 2 = 3**. Jest nią **3**. Uwaga: kabaliści opuszczają w numerologii **10**, tj. używają tylko cyfr **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** i np. **10 = 1 + 0 = 1**, **20 = 2 + 0 = 2**, **30 = 3 + 8 = 11 = 1 + 1 = 2** itd. Mając cyfrę osobistą, zaglądamy do książki lub książek z numerologii i odczytujemy odpowiednią wróżbę. Treści zawarte w książkach dość często różnią się, gdyż zależą od inwencji i wyobraźni autora.

Na podstawie informacji dotyczących czy to cyfry osobistej, czy dziedzicznej, określamy swój byt. Stąd numerologia ma charakter wróżbiarski i zależy od talentu wróżącego. Opierając się na liczbach, zapewnia nieograniczone pole inwencji twórczej. Mamy więc wspomniane cyfry osobiste i dziedziczne, ale także cyfry opiekuńcze, sukcesu itp. Ponadto możemy dowiedzieć się, o czym powinno się pamiętać, motto na najbliższe, jak i dalsze dni, na kogo zwrócić uwagę, z kim się zaprzyjaźnić, a nawet jakie napoje są dobre dla nas. Niektóre z tych podręczników zawierają bardzo szczegółowe porady. Najbardziej podobały mi się pewne „złote” myśli, np. „Kto mówi to co chce, usłyszy to czego nie chce” czy „Życie bez przyjaciół bywa smutne”.

A tak nawiasem mówiąc, mistykę liczbową uprawiali pitagorejczycy. Doszukiwali się w liczbach pewnych cech niezwykłych. Ustalili na przykład, że 6 – to życie, 7 – dusza, 8 – miłość, 9 – roztropność a 10 – doskonałość Wszechświata.

No, a my sami przyznajemy się do 13 (szczególnie w piątek). W 1884 r. grupa mieszkańców Nowego Jorku założyła klub trzynastki, którego celem było zwalczenie przesądu związanego z 13. Członkowie klubu jadali wspólnie obiad 13 każdego miesiąca o godzinie 13 po 13-tu przy stole. Składka miesięczna wynosiła 13 centów. Niestety, nie zwalczyli przesądu, obawa przed 13 w USA nadal się utrzymuje.

O liczbach można by pisać jeszcze wiele, tak od strony matematycznej (np. liczby ważniejsze od innych – π, **e**), jak i społecznej (liczby jako manipulacje faktami w prasie i polityce). Sądzę jednak, że wystarczy tymczasem to, co zostało przedstawione. Być może powrócę do nich w kąciku matematycznym.

Mam jednak nadzieję, że udało mi się choć trochę zwrócić uwagę czytelników na liczby i ich rolę w naszym życiu.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

P.S. Ponieważ jestem racjonalistką, to **2007** jest dla mnie tylko liczbą, którą można się pobawić i zapisać np. w postaci $\mathbf{2007 = 2+0+0+7 = 9 = \sqrt{(2 + 0! + 0!)} + 7}$ ($\mathbf{0! = 1}$ w matematyce).

W ubiegłym semestrze studenci WETI (informatyka i telekomunikacja) uczęszczali na zajęcia z kultury języka polskiego. W ramach tych zajęć mieli m.in. napisać krótki tekst na dowolny temat. Prowadzącemu ten przedmiot chodziło o zorientowanie się, jakie błędy językowe robią studenci, a także – niejako przy okazji – co ich nurtuje lub interesuje. Poniżej przykłady takich tekstów.

Stefan Zabieglik
WZiE

Moja wizja cywilizacyjna na najbliższe 20 lat

Jak powiedział kiedyś ktoś mądry, IQ świata jest stałe. Wniosek: im więcej ludzi, tym więcej kretynów. Obecnie na Ziemi żyje około 6 miliardów osób, a średnie IQ to jakieś 100–110. Analizy demograficzne każą nam wierzyć, że około 2025 r. będzie nas już ponad 8 miliardów, nietrudno zatem wywnioskować, że skoro średnie IQ osiągnie pułap 75–80, czyli spadnie do poziomu kwalifikującego dzisiaj do miana debila, procent ludzi ociężałych umysłowo drastycznie wzrośnie. Moja wizja cywilizacyjna? Jeśli brać serio powyższą prognozę, to niedaleka przyszłość nie kreśli się zbyt różowo.

Zresztą ludzka głupota już dzisiaj osiąga apogeum i wcale nie musimy czekać do 2025, żeby się o tym przekonać. Zidiocenie społeczeństwa widać na każdym kroku. Weźmy na przykład takie USA, krainę mlekiem i miodem płynącą, Mekkę, Eden i Eldorado w jednym. Nasz (polski) ideał i wzór niedościgniony. Naród podziwiany wszędzie, światowa potęga gospodarcza... A przecież tam idiota rodzi się co minutę. Potem czytamy o naszych geniuszach zza oceanu w „Nagrodach Darwina” albo dowiadujemy się, że dwie stukilogramowe nastoletnie Amerykanki zaskarżają firmę McDonald’s, gdyż ta nie ostrzegła ich, że codzienna kon-