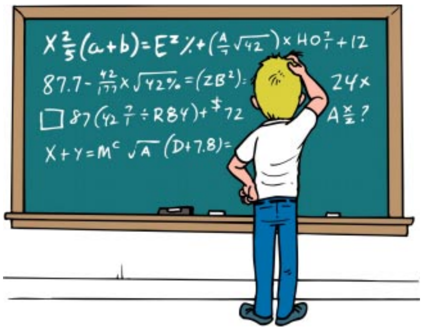

Kącik matematyczny

Są pewne pojęcia w matematyce, które mają ciekawą i burzliwą historię. Do nich właśnie należą liczby zespolone. Można je spotkać na przykład na zajęciach z matematyki (i nie tylko). Wówczas to podaje się tylko pewne podstawowe fakty. Są one wynikiem uporządkowanej już teorii, na którą pracowali matematycy przez stulecia. Niestety, brak jest całkowicie czasu na przedstawienie intrygującej historii liczb zespolonych. A jest ona niezwykle pouczająca. Pokazuje bowiem, jak to w pewnych momentach tworzenia teorii, matematycy borykający się z zagadnieniami, których nie potrafią rozstrzygnąć, muszą opuścić świat, w którym działali do tej pory. Wiedzą, że jeżeli chcą iść dalej, muszą to zrobić.

Dlatego też postanowiłam opowiedzieć troszkę o liczbach zespolonych.

Liczby zespolone – co to takiego?

„Pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych nie są zerami, ani nie są ujemne, ani dodatnie. Stąd wynika, że pierwiastki te nie mogą znajdować się wśród możliwych liczb. W konsekwencji są to liczby niemożliwe. I tak dochodzimy do liczb na ogół zwanych urojonymi albo też wyobrażalnymi dlatego, że istnieją one tylko w wyobraźni.”

L. Euler „Algebra”

„Świat urojony – piękne schronienie dla boskiego ducha – prawie pomost między istnieniem a nieistnieniem.”

G. W. Leibniz

Liczby zespolone, a wśród nich liczby urojone – ach, jak to brzmi tajemniczo. I natychmiast rodzą się pytania: czym one są? Skąd się wzięły? Jaką rolę odgrywają w naszym życiu?

Liczby urojone pojawiły się z potrzeby i rodziły w głowach wielu matematyków przez wiele stuleci. Początkowo wywołały ogromny niepokój, a nawet wzburzenie. Wielu je odrzucało i traktowało jako pozbawione sensu. Pomimo to niektórzy po prostu je stosowali niezależnie od tego, dokąd prowadziły. I wówczas okazywało się, że otrzymane wyniki wydawały się poprawne.

Aby pojąć trudności w akceptacji liczb zespolonych, należy przyjrzeć się właściwościom liczb rzeczywistych. Jak wiadomo, liczby te różne od zera są albo ujemne, albo dodatnie. Ich arytmetykę tworzą różne reguły. Tu jednak jest szczególnie ważna jedna z nich, a mianowicie, że iloczyn 2 liczb dodatnich czy iloczyn 2 liczb ujemnych jest liczbą dodatnią. Na przykład łatwo można stwierdzić, że $\mathbf{2 \cdot 4 = 8}$, jak również $\mathbf{(-2) \cdot (-4) = 8}$.

Stąd pojawia się problem, gdy chcemy określić wartość pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej, np. $\sqrt{-1}$. Zgodnie z jego definicją należałoby podać taką liczbę rzeczywistą, która pomnożona przez samą siebie dałaby liczbę ujemną – tu **(–1)**. No cóż, ale taka liczba nie istnieje. Dlatego początkowo niektórzy z matematyków twierdzili, że rozważania na ten temat należy odrzucić.

Jednakże problem ten nie zniknął i pojawił się w próbach rozwiązania równania $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$. Wówczas równanie to także potraktowano jako pozbawione sensu. Ale stała się rzecz dziwna. Od czasu do czasu matematycy dostrzegali, że mogliby skrócić rozważania i otrzymać poprawne wyniki, gdyby w trakcie pracy używali symbolu na $\sqrt{-1}$ i gdyby traktowali go jako zwykłą liczbę. No i tak zaczęła się historia liczb urojonych.

Oczywiście należy sobie uświadomić, że w historycznym rozwoju matematyki wszystkie te nowe odkrycia i uogólnienia nie były w żadnym przypadku dziełem jednej osoby.

Początki historii liczb zespolonych określa się na wiek szesnasty. Wówczas to dwaj matematycy włoscy Tartaglia (1500–1557) i G. Cardano (1501–1576) wykazali, że pierwiastki równania stopnia trzeciego wyrażają się ogólnymi wzorami poprzez współczynniki tego równania. Osiągnięcie to przyczyniło się do postawienia nowych zadań. Okazało się, że podczas obliczeń mogą pojawić się pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych a w szczególności $\sqrt{-1}$. Oczywiście nie jest to żadna liczba rzeczywista. Ponieważ innych liczb poza rzeczywistymi podówczas nie znano, powstał problem, czym jest wielkość „$\sqrt{-1}$”. Część matematyków uważała, że rozważanie „$\sqrt{-1}$” nie ma żadnego sensu. Natomiast inni traktowali tak, jak liczbę rzeczywistą, określając odpowiednio działania. I tak na przykład Cordano określił je w następujący sposób:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \ , \qquad (-\sqrt{-1}) \cdot \sqrt{-1} = 1 \, ,$$

$$\sqrt{-1} \cdot (-\sqrt{-1}) = 1 \, , \qquad (-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1 \, .$$

Inny matematyk włoski R. Bombelli w swojej pracy z 1572 r. zasugerował, że czasowo można by zostawić pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych jako środek pośredniczący pomiędzy równaniem stopnia trzeciego i jego rozwiązaniami rzeczywistymi.

W wieku siedemnastym Kartezjusz uznał pierwiastki z liczb ujemnych za gorsze od samych liczb ujemnych. Nazwał je liczbami urojonymi. Nazwa ta przyjęła się i po pewnym czasie na oznaczenie pierwiastka kwadratowego z (–1) zaczęto używać symbolu „**i**” (od słowa łacińskiego imaginarius – urojony). Nikt na początku nie wiedział, dlaczego nowy symbol „**i**” okaże się tak użyteczny.

Przez dwa stulecia matematycy posługiwali się nim, nie mając dla niego uzasadnienia. Jeszcze na początku XVIII w. liczby zespolone były ciągle obywatelami II kategorii w matematyce. Jednakże wiek XVIII dał wybitnego matematyka Leonarda Eulera (1707–1783). Wniósł on ogromny wkład w rozwój liczb zespolonych i spowodował, że stały się one narzędziem pracy matematyka. W sposób naturalny używał symbolu $\sqrt{-1} = i$. Pozwoliło to zapisać liczbę zespoloną jako $z = a + bi$, gdzie **a**, **b** są liczbami rzeczywistymi.

Ponieważ zarówno **a**, jak i **b** mogą być równe zeru, to w zakres szeroko rozumianych notacji liczb zespolonych wchodzą tzw. liczby czysto urojone, takie jak $i = 0 + 1 \cdot i$, oraz dowolne liczby rzeczywiste, takie jak np. $5 = 5 + 0 \cdot i$. W tym sensie liczby zespolone zawierają liczby rzeczywiste.

L. Euler nie ograniczył się tylko do utrwalenia notacji $\sqrt{-1} = i$, ale rozwinął tzw. postać trygonometryczną liczby zespolonej. Znany jest tzw. wzór Eulera:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad (e \approx 2{,}71).$$

Z niego zaś wynika inny wzór (obecnie uważany za jeden z najpiękniejszych wzorów, obok znanego wzoru Einsteina $E=mc^2$). Jest nim:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Łączy on najważniejsze stałe matematyki, tj. **0**, **1**, $\boldsymbol{\pi}$, ***e*** oraz „**i**” (prawdziwa parada gwiazd). Krótko mówiąc, Euler wykazał, że sinusy i cosinusy są zamaskowanymi funkcjami wykładniczymi. To zaś miało odegrać w przyszłości ważną rolę praktyczną.

Jeszcze dziwniejsze stało się wyliczenie przez Eulera $\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{i}}$ czyli urojonej potęgi liczby urojonej. Okazało się, że $\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{i}} = e^{-\pi/2}$. Jak widać, jest to liczba rzeczywista. Ilość wyników, jakie uzyskał Euler, daje mu szczególne miejsce w historii liczb zespolonych.

Postać trygonometryczną liczby zespolonej, jakiej używał Euler, po raz pierwszy podał J. Wallis (1616–1703). Można ją także znaleźć w pracach A. de Moivre'a (1667–1754) – matematyka angielskiego. Należałoby także wspomnieć, że postacią trygonometryczną liczb urojonych zajmował się gdański nauczyciel matematyki Henryk Külm (1690–1769). Wyniki otrzymane przez niego były wysoko oceniane przez L. Eulera (fakt ten znany jest z listownego kontaktu między nimi).

Idea, aby liczbę zespoloną traktować jako punkt na płaszczyźnie, pojawiła się w 1797 r. w pracy norweskiego mierniczego i kartografa C. Wessela (1745–1818). Zamiarem Wessela było stworzenie aparatu służącego do rozwiązywania zadań geodezyjnych. W tym celu opracował dokładny rachunek wektorowy na płaszczyźnie, będący jednocześnie modelem geometrycznym algebry liczb zespolonych. Ugruntowało to zarówno liczby zespolone, jak i działania na nich. Ta geometryczna definicja doprowadziła do określenia systemu liczbowego, w którym istnieje pierwiastek kwadratowy z (–1) i spełnione są zwykłe prawa arytmetyki. Niezwykle ważnym faktem stało się również to, że mnożenie liczby zespolonej przez „**i**” powoduje obrót o 90° wokół początku układu **0**.

Płaszczyznę zespoloną w teorii liczb zespolonych utrwalił genialny matematyk C. F. Gauss (1777–1855). Obecnie, omawiając ich interpretację geometryczną, mówi się o płaszczyźnie Gaussa. Niezwykle ważnym wynikiem, uzyskanym także przez Gaussa, jest „Podstawowe Twierdzenie Algebry”. Wiąże ono liczby zespolone z rozwiązaniami równań wielomianowych. Fakt ten nadał im szczególny status w matematyce.

Wiek XIX w liczbach zespolonych, to prace wielu wybitnych matematyków, a wśród nich C. Weierstrassa (1815–1897) i F. B. Riemanna (1826–1866). Cały wiek XIX przyniósł ogromny rozwój wiedzy tak o liczbach zespolonych, jak i o funkcjach zespolonych. Należy wymienić tu jeszcze ogromny wkład dwóch matematyków: Cauchy'ego (1789–1857) i W. R. Hamiltona (1805–1865). To koncepcja Hamiltona traktowania liczb zespolonych jako pary liczb rzeczywistych pomogła stworzyć aksjomatyczne podejście do algebry.

Współcześnie, aż do chwili obecnej rosła i rośnie ilość prac związanych w pewien sposób tak z liczbami zespolonymi, jak i funkcjami zespolonymi. Dlatego trudno byłoby wymienić wszystkich autorów tych prac.

Niemniej, już ten fragment historii pokazuje, jak to w matematyce często stajemy wobec kwestii istnienia i kwestii niemożności. Wymaga to stworzenia teorii, w myśl której czasami bezsensowny do tej pory zapis zaczyna określać dobrze zdefiniowany obiekt. Należy tylko pamiętać, że definiując nowe byty nie można narazić na niebezpieczeństwo już istniejących i nie można zaprzeczać już ustalonym wynikom.

W matematyce „rewolucji” dokonuje się, nie burząc starych światów. Te nowe światy wchłaniają poprzednie lub istnieją obok nich. To piękny przykład współistnienia przodków i nowo narodzonych.

Jest jeszcze jeden ciekawy fakt związany z liczbami zespolonymi. Zanim powstała ich gruntowna teoria, fizycy stwierdzili, że są one użyteczne przy opisywaniu różnych zjawisk fizycznych. Zaczęły one więc wchodzić do równań elektrostatyki, hydromechaniki, a nawet do równań mechaniki kwantowej. Zatem ich użyteczność jest również istotnym powodem, aby o nich mówić.

Oczywiście na pierwszy rzut oka wydaje się bardzo dziwne, że pierwiastek kwadratowy z minus jedności – coś, czego nikt nigdy nie widział i co wydaje się z natury niemożliwe, okazał się użyteczny przy rozwiązywaniu takich zagadnień, jak konstrukcja dynama, silnika elektrycznego czy oświetlenia elektrycznego.

Ale cóż, jeżeli jakiś fakt robi na nas wrażenie dziwnego, oznacza to, że być może patrzymy z niewłaściwego punktu. Wobec tego jeżeli „**i**” wydaje nam się dziwne, to dlatego, że myślimy o „**i**” jako o zwykłej liczbie. Faktycznie „**i**” jest operacją polegającą na obrocie o 90°. Ponieważ każdy generator prądu zmiennego zawiera obracające się części, które w ciągu każdej minuty obracają się o wiele kątów prostych, a więc wielokrotnie stosuje się do nich operacja „**i**”. Innym także ważnym faktem jest to, że jeżeli jakieś rozważania na gruncie technicznym doprowadzają do wykładników „urojonych”, to mamy do czynienia z drganiami (ach, ten wzór Eulera).

Oczywiście inżynierowie muszą znać tylko najbardziej elementarne wyniki dotyczące liczb zespolonych. Bardziej zaawansowane fakty interesują przede wszystkim matematyków zawodowych. Znajdują oni i udoskonalają nowe metody, z których – gdy już są definitywnie opracowane – mogą korzystać praktycy.

Kończąc moją opowieść, mam cichą nadzieję, że udało mi się chociaż zwrócić uwagę na istnienie liczb zespolonych. Można jak zwykle stwierdzić, że jeśliby ich nie było, to szybko należałoby je utworzyć.

Proszę tylko nie próbować mieć na koncie w banku $\sqrt{-10000}$ złotych, bo są to niestety pieniądze urojone.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki