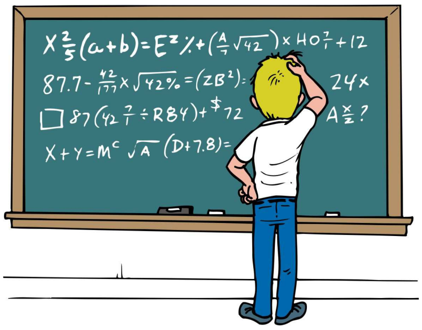

Kącik matematyczny

No i cóż, czasami moja „dusza matematyczna” buntuje się. Do ponownego zajęcia się problemami matematycznymi sprowokował mnie artykuł Ireny Cieślińskiej pt. „Nieskończoność od początku do końca”. Został on zamieszczony w „Przekroju” (nr 43/44) z ubiegłego roku. Z uwagi na to, że to tygodnik dla szerokiego grona czytelników (nie zawsze chętnych matematyce), oczekiwałam artykułu promującego matematykę.

Niestety, po przeczytaniu go pozostały mi jedynie mieszane uczucia. Po pierwsze, sam temat jest bardzo trudny i niełatwo jest wyjaśnić zwykłemu czytelnikowi potrzebę zajmowania się nieskończonością. Po drugie, podanie kilku przykładów tak naprawdę oderwanych od otaczającej nas rzeczywistości oraz stwierdzenie, że dwóch geniuszy matematycznych (G. Cantor i K. Godel), zajmując się nieskończonością, straciło najpierw rozum, a potem życie – w żaden sposób nie zachęca do matematyki.

No i co z tą nieskończonością?

„Dwie rzeczy są nieskończone – wszechświat i głupota ludzka. Co do pierwszej istnieją jeszcze wątpliwości.”

A. Einstein

„Czymże jest człowiek w przyrodzie? Niczym w porównaniu z nieskończonością, wszystkim w porównaniu z niczym, czymś pośrednim między niczym a wszystkim”.

B. Pascal

Nauczając dość długo matematyki, muszę stwierdzić, że i ja również wiele pojęć matematycznych przyjmuję za oczywiste. Brak czasu, a może i pytań od studentów powoduje, że podaje się je bez szerszej motywacji. Tak też jest z nieskończonością.

Jak już wspomniałam, dopiero wymieniony artykuł kazał mi się zastanowić, co ja wiem o nieskończoności. Dlatego też postanowiłam wyszukać i przedstawić pewną ilość informacji czy refleksji o nieskończoności w matematyce.

Jeśli się chwilę zastanowić, to właśnie matematyka (z pewnego punktu widzenia) jest nauką o nieskończoności.

Oczywiście w życiu codziennym, dokonując tylko prostych operacji arytmetycznych, mamy do czynienia z matematyką skończoną. Rozszerzając jednak swą wiedzę matematyczną, trudno jest uniknąć nieskończoności. Tak naprawdę, to jest obfitość nieskończoności.

Weźmy na przykład najprostszy ze wszystkich obiektów nieskończonych – system liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5,... . Trzy kropki oznaczają, że lista biegnie dalej i nigdy się nie zatrzyma. Ma ona też tę własność, że jeżeli pewna liczba jest w jej zbiorze, to jest także jest następnik. Nie może być w nim liczby największej, bo zawsze możemy dodać 1 i otrzymać liczbę większą niż dana.

Stąd liczb naturalnych jest więcej niż milion, miliard czy bilion. Jest ich, jak to się mówi, nieskończenie wiele.

Szukając dalszych informacji, w małym słowniku matematycznym pod hasłem nieskończoność możemy przeczytać, co następuje: nieskończoność – pojęcie używane w różnych działach matematyki. Oznaczone jest symbolem ∞ (pozioma ósemka). Rozróżniamy dwa rodzaje nieskończoności: „potencjalną” i „aktualną”.

Z pojęciem nieskończoności potencjalnej spotykamy się, ucząc się granic, np. pisząc $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Rozumiemy tu, że wzrost funkcji $f(x)$ dla x zmierzającego do x_0 jest nieograniczony. Przykładem tego jest funkcja $f(x)=\frac{1}{x^2}$, gdy wartości x są coraz bliżej zera (np. dla $x = 10^{-10}$ czy $x = 10^{-100}$ mamy wartości $f(10^{-10}) = 10^{20}$, $f(10^{-10}) = 10^{200}$ itp.).

Mówiąc więc, że funkcja jest „nieskończenie wielka”, mamy na myśli właśnie nieskończoność potencjalną.

W innym sensie należy rozumieć słowo nieskończoność w zdaniach: „liczb naturalnych jest nieskończenie wiele”, „każdy odcinek zawiera nieskończenie wiele punktów”, „równanie trygonometryczne $\sin x = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań” itp. Jest to tzw. „nieskończoność aktualna.”

Fascynujące jest to, jak pojęcie nieskończoności czy to potencjalnej, czy aktualnej pojawiło się w historii matematyki.

Nieskończoność kryła w sobie moc, która starożytnych Greków zaskakiwała i przerażała. Fakt ten potwierdzają różne paradoksy, a między innymi znany paradoks Zenona z Elei (V w.p.n.e). Dowodzi on, że szybki Achilles nigdy nie dogoni wlokącego się żółwia. Nie można bowiem wykonać nieskończonej liczby działań w skończonym czasie. Na przykład zanim przejdzie się określoną odległość – przyjmijmy 2 m, trzeba przejść najpierw jej połowę 1 m, następnie połowę pozostałej połowy – 1/2 m, potem połowę pozostałej połowy – 1/4 m i tak dalej. Ponieważ ciąg tych „połówek” jest nieskończony, nie można więc dotrzeć do celu.

Dlatego też, jeżeli w chwili początkowej żółw znajduje się w odległości 1 m od Achillesa i mają pokonać odległość 2 m, to gdy Achilles biegnie 2 razy szybciej niż żółw (powiedzmy Achilles pokonuje 1 m w ciągu 1 sek., a żółw 1 m/sek.), to nigdy go nie dogoni. Żółw ciągle będzie o połowę pozostałej drogi przed Achillesem. Achilles więc musiałby gonić żółwia przez wieczność. Stąd, według Zenona z Elei, nic we wszechświecie nie może się poruszać.

Obecnie problem Achillesa i żółwia nie jest trudny do wyjaśnienia. Kłopoty znikają, gdy rozważymy granicę wyścigu (a więc granicę odpowiedniego ciągu liczbowego – ciągu sum częściowych).

W każdym kroku przecież Achilles zbliżał się, a nie oddalał od granicy (czyli mety 2 m). Możemy więc powiedzieć: proszę mi podać jakąś dowolnie małą odległość, a ja podam, w którym momencie Achilles i żółw znajdą się w punktach odległych od granicy mniej niż podana odległość. Załóżmy, że chodzi o odległość 10^{-3} m, czyli milimetr. Wówczas można wykazać, że po 11 krokach Achilles znajduje się w odległości 0,000977 m od granicy 2 m, podczas gdy żółw w tym momencie będzie w odległości 2 razy mniejszej od granicy. Bez względu na to, jak małą odległość ktoś poda, zawsze można obliczyć, w którym momencie Achilles znajdzie się w punkcie mniejszym niż ta odległość. Oznacza to, że Achilles może się zbliżyć w miarę postępu wyścigu na dowolnie małą odległość od punktu oddalonego o 2 m od linii startu, a tym samym odległość 2 m jest jego granicą.

Tak więc, zamiast rozważać wyścig jako ciąg nieskończonej liczby odcinków, rozważmy go jako granicę ciągu skończonych wyścigów pomocniczych, tj.

$$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots \text{ czyli } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

I tak została otrzymana równość

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2$$

lub w notacji bardziej fantazyjnej $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$.

No cóż, z lewej strony mamy nieskończoność, a z prawej skończoność. Jest to, jak widać, źródło siły i paradoksu.

Pojęcie granicy ciągu liczbowego, czy też szeregu geometrycznego występuje obecnie we wszystkich programach matematyki na studiach technicznych.

Sumowanie jednak nieskończenie wielu składników może dać skończony wynik pod warunkiem, że będą one dążyły do zera. Krótko mówiąc, problem nieskończoności, zera i granicy są ze sobą nierozerwalne. W historii matematyki spotkać można pogląd, że starożytni Grecy stworzyli matematykę ścisłą i abstrakcyjną, ale bez nieskończoności.

Pogląd ten powinien chyba ulec rewizji w świetle niezwykłej książki wydanej w 2007 roku pt. „Kodeks Archimedesa" – tajemnice najsłynniejszego palimpsestu świata (palimpsest – starożytny lub średniowieczny rękopis pisany na pergaminie, z którego wytarto tekst pierwotny). Dwaj autorzy tej książki, Reviel Netz i William Noel, opisują, jak to dzięki ultranowoczesnym metodom optycznym odczytano najsłynniejszy kodeks naukowy.

Archimedes w swoim traktacie „O metodzie" (III w.p.n.e) obliczył między innymi pole powierzchni ograniczonej odcinkiem paraboli. Z tej figury krzywoliniowej „wyjmował" trójkąty, zostawiając na początku obszar większy niż ziarnko piasku, a następnie mniejszy niż ziarnko piasku i tak dalej, i tak dalej. Różnica ta staje się mniejsza niż dowolnie mała wielkość. Rozwiązanie to wykracza poza granicę geometrii. Jest oparte na połączeniu dowodu nie wprost i potencjalnej nieskończoności. Jeśli się chwilę zastanowić, pojawia się tu „duch" całki oznaczonej w liczeniu pól figur płaskich.

Ponadto w pracach Archimedesa można znaleźć także nieskończoność aktualną. Porównywał on bowiem zbiory nieskończone. Można przypuszczać, że porównując je, doszedł do wniosku, iż jedynym możliwym dowodem ich równości jest istnienie wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między nimi.

No cóż, przecież ta wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość stała się podstawowym narzędziem teorii zbiorów, stworzonej w drugiej połowie XIX wieku.

Odkrycie „Kodeksu Archimedesa" potwierdza, że Grecy potrafili wyobrazić sobie nieskończoność aktualną i umieli nią operować. Jednak w większości rozumowań woleli obchodzić się bez niej.

Niestety, na spotkanie z nieskończonością przyszło długo poczekać. Dopiero w czasach tzw. rewolucji naukowej, tj. XVI–XVII w. pojawiła się nieskończoność potencjalna. Brak jednak było ścisłości charakteryzującej matematykę grecką. Świadczy o tym powstały w XVII wieku (czasy I Newtona) tzw. rachunek infinitezymalny, dokonujący obliczeń na „nieskończenie małych".

Odegrał on ogromną rolę w tworzeniu się podstaw rachunku różniczkowego i całkowego. Stąd już sam ten fakt mówi o sile i niezwykłości nieskończoności.

O ile rewolucja naukowa wprowadziła nieskończoność bez matematycznej ścisłości, to współczesna nauka – poczynając od XIX wieku, zachowała tak nieskończoność, jak i ścisłość. Można byłoby tu wymienić bardzo długą listę wybitnych matematyków, którzy się do tego przyczynili. Nastąpił ogromny rozwój rachunku różniczkowego i całkowego. Ten zaś, jak wiadomo, jest językiem przyrody. To ona dość często przemawia równaniami różniczkowymi. Traktując więc wszechświat jako księgę, której tajemnice próbujemy przecież odkryć, używamy w tym celu matematyki. A to również potwierdza konieczność użycia nieskończoności potencjalnej.

Inaczej rzecz się ma z nieskończonością aktualną. Przede wszystkim wymaga ona szczególnego myślenia abstrakcyjnego. Jest ono niezbędne w stworzonej w XIX w. przez G. Cantora teorii zbiorów, gdzie nieskończoność aktualna odgrywa ogromną rolę. Tam też zbiory nieskończone mają taki sam byt, jak wszystko inne w matematyce. Nie wszystkie nieskończoności są jednak równie nieskończone. Niektóre są bardziej nieskończone od innych.

Dlatego też wspomniany przeze mnie artykuł z „Przekroju", poświęcony nieskończoności aktualnej, nie był łatwy do zrozumienia nawet dla sympatyków matematyki.

Sądzę, że potrzeba nieskończoności potencjalnej, która odegrała ogromną rolę w rachunku różniczkowym i całkowym, jest bardziej przekonująca. Właściwie bez niej nie byłoby takiego postępu technicznego, w jakim żyjemy.

Niezwykłość nieskończoności wynika też z faktu, że jest przeciwieństwem zera. Zero i nieskończoność, to dwie strony tej samej monety. Dlatego też drogą do jej zrozumienia jest studiowanie zera. W świecie liczb zespolonych nieskończoność i zero znajdują się na przeciwnych biegunach. Matematykiem, który połączył te dwie koncepcje, był F. B. Riemann.

Wśród wielu ciekawostek niezwykły jest dowód o istnieniu Boga, podany przez B. Pascala.

Połączył on w nim rachunek prawdopodobieństwa z zerem i nieskończonością.

W rzeczywistości o nieskończoności można opowiadać dość długo (no, może nie nieskończenie długo). Jak jednak wiadomo, każdy nadmiar jest szkodliwy.

Kończąc więc, życzę moim Czytelnikom, aby doświadczali nieskończenie wielu radości i satysfakcji w spotkaniach z matematyką. Bo cudowna moc matematyki, jak twierdzi ksiądz profesor Michał Helle („religijny Nobel" w b.r.), nie wyczerpała się w tworzeniu ogólnej teorii względności, fizyki kwantowej czy teorii chaosu. Działa ona nadal, prowadząc nas ku zrozumieniu świata. Świat zaś nie jest „szybkim liczydłem", ale „fizycznie interpretowalną" bogatą „strukturą matematyczną".

Sądzę, że słowa księdza profesora stanowią dobre zakończenie tego artykułu.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

P.S. Tak bardzo chciałabym, aby moi uczniowie zrozumieli, że matematyka jest muzyką, a nie tylko nutami, za pomocą których „torturuje się" biednych studentów.