Cały proces nauczania matematyki w IB na wszystkich poziomach wspierany jest przez użycie kalkulatorów graficznych, nazwanych w skrócie GDC (Graphic Display Calculator).

Kalkulatory nie wyręczają uczniów z rozwiązywania zadań, lecz poprzez możliwość wizualizacji wspierają proces dydaktyczny. W świecie uczelni wyższych pokutuje mit, iż uczniowie z maturą IB nie potrafią nic bez kalkulatora, co jest zupełną nieprawdą.

Obecnie jedna z części egzaminu maturalnego z matematyki jest pozbawiona możliwości korzystania z GDC, i w tej części uczeń musi wykazać się zrozumieniem wymaganego materiału. Z drugiej strony żyjemy w świecie zaawansowanych technologii i sztuką jest umiejętność praktycznego jej stosowania, a to podlega ocenie na maturze IB.

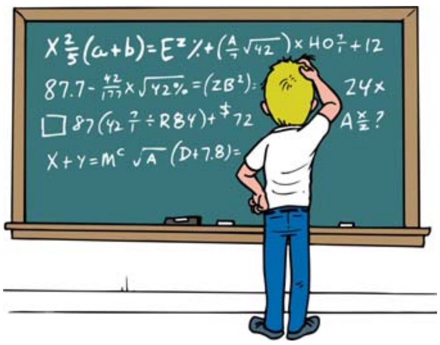
To na polskiej maturze wciąż zabrania się uczniom używać kalkulatorów liczących chociażby funkcje trygonometryczne, zmuszając ich do zabawnego szukania wartości w tablicach matematycznych.

Patrząc z perspektywy nauczyciela matematyki w programie IB, jak również pracownika Studium Nauczania Matematyki Politechniki Gdańskiej, z całą pewnością mogę powiedzieć, że program matury międzynarodowej stanowi świetne przygotowanie do studiów. Uczniowie Ibiki – jak na nich mówimy – wiedzą, czym jest ciężka praca nad książkami czy pisanie prac badawczo-naukowych. Student taki również po pierwszych laboratoriach z fizyki czy chemii jedynie o co zapyta, to o termin oddania sprawozdania i liczbę słów, do której musi się ograniczyć oraz czy mógłby to zrobić w języku angielskim.

Kryteria klasyfikacji na stacjonarne i niestacjonarne studia na Politechnice Gdańskiej dla kandydatów zdających maturę międzynarodową IB są ustalone korzystnie, choć nie uwzględniają pewnych ważnych informacji. Pierwsze to brak choćby symbolicznego tylko podziału uczniów z maturą IB na poziomy trudności zdawanego przedmiotu podstawowego (w przypadku matematyki proponowałbym przypisanie poziomom Studies, SL, HL następujących wag 0.8, 0.9, 1.0). Druga, równie istotna, sprawa dotyczy sensu wliczania do sumy punktów oceny z języka angielskiego. Uczniowie klas IB w Polsce zdają wszystkie egzaminy w języku angielskim. Ich poziom językowy musi być wysoki (porównywalny z Proficiency czy Native Speaker), w przeciwnym wypadku nie zdaliby w ogóle matury.

Myślę, że warto zabiegać o takich studentów, aby mieć w szeregach Politechniki Gdańskiej tych właśnie ambitnych i zdolnych młodych ludzi.

Mariusz Kaszubowski
Studium Nauczania Matematyki



Kącik matematyczny

Współczesne tempo życia, a także zalew nieistotnych informacji prowadzi do dość szybkiej utraty pamięci o przeszłości historycznej wielu faktów naukowych, w tym i matematycznych. Sporo pojęć przyjmuje się jako oczywiste, nie pytając, skąd one są i kiedy się pojawiały. Sądzę więc, że o niektórych z nich (oczywiście tych matematycznych) należałoby od czasu do czasu przypomnieć. Wybór tematów będzie różnorodny, no i po części subiektywny. Będę się jednak starała, aby nie zanudzić czytelników.

I tak, ponieważ ostatnio zauroczyło mnie zero oraz jego historia, opowieści moje rozpocznę od niego.

Zero – wielkie nic

Bóg stworzył wszystko z niczego,
ale tę nicość wciąż widać.
P. Valery

Ludzie są jak zera, nabierają znaczenia dzięki pozycji.
(przypisywane Napoleonowi)

Zero – to historia wielu paradoksów, jak i nietypowych sytuacji, jakie stwarza ta liczba.

Poczynając od działań arytmetycznych, zero zachowuje się inaczej niż każda inna liczba.

Weźmy na początek zwykłe dodawanie. Jeżeli dodamy dowolną liczbę różną od zera do siebie samej, to na pewno ona się zmieni (2+2=4, 3+3=6 itp.), natomiast 0+0=0, a ponadto mamy a+0=a dla każdej liczby rzeczywistej „a". Oznacza to, że zero w dodawaniu nic nie robi. Jest to tzw. element neutralny dodawania.

Nietypowo również zachowuje się zero w mnożeniu. Każda liczba pomnożona przez zero staje się zerem (2x2=0, 3x0=0 i ogólnie ax0=0).

Ma to swoje konsekwencje w dzieleniu. Biorąc pod uwagę, że dzielenie liczby a przez b (a:b) polega na znalezieniu takiej liczby c (jedynej), że b x c=a, mamy też sytuację nietypową.

Jeżeli a≠0, to 0:a=0, ponieważ ax0=0, natomiast nie można dzielić przez zero, tj. działanie a:0 jest niewykonalne.

Rzeczywiście, jeżeli a≠0 i chcemy podzielić przez zero (a:0), to nie istnieje taka liczba c, że 0xc=a, bowiem 0xc=0≠a.

Natomiast iloraz 0:0 nie jest określony jednoznacznie, gdyż dla dowolnej liczby c mamy 0xc=0.

Tak więc ani dla a≠0, ani dla a=0 nie możemy podać wyniku dzielenia a:0.

Wiedza ta znana jest nam już od szkoły podstawowej, ale na ogół w postaci „brzydkiej reguły".

No cóż, mnożenie przez zero powoduje skrócenie osi liczbowej do 1 punktu, ale dzielenie przez zero niszczy gmach matematyki, i nie tylko.

Podam tu pewną historię przeczytaną w książce Ch. Seife'a, cytuję: „Dwudziestego pierwszego września 1997 roku, podczas rejsu w pobliżu wybrzeży Wirginii krążownik rakietowy Yorktown wartości miliarda dolarów zadygotał, a jego silniki zatrzymały się. Yorktown uległ groźnej awarii. W komputerach krążownika właśnie zainstalowano nowe oprogramowanie do sterowania maszynownią. Niestety, nikt nie zauważył bomby zegarowej czającej się w kodzie programu – zera, które powinno zostać usunięte przed zainstalowaniem oprogramowania.

Z jakiegoś powodu zero pozostało ukryte w kodzie. Ujawniło się dopiero wówczas, gdy program załadowano do pamięci i uruchomiono. Wtedy nastąpiła katastrofa.

Gdy komputer krążownika Yorktown usiłował wykonać dzielenie przez zero, silniki o mocy 80 000 koni mechanicznych natychmiast stały się bezużyteczne.

Żadna inna liczba nie mogłaby wyrządzić tak dużych szkód."

Jak się okazuje, w tej liczbie kryje się tak wielka moc.

Zero pojawia się również w dość nietypowy sposób przy okazji szeregów liczbowych, tj. „sum nieskończonych". Przez pewien czas trudno było poradzić sobie z pewnymi problemami. Na przykład rozważmy następujący szereg: 1-1+1-1+1-1-…

Nietrudno jest stwierdzić, że sumą tego szeregu powinno być zero. Wystarczy pogrupować (1-1)+(1-1)+(1-1)+ …, a uzyskamy szereg zer 0+0+0+…. Sumą tego szeregu jest ewidentnie zero. Ale uwaga, jeśli pogrupujemy inaczej, tj. 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+ …, wówczas otrzymamy 1+0+0+0, a stąd suma wynosi 1.

Otrzymany wynik mówi, że ten sam szereg daje tak sumę 0, jak i 1.

Z problemem tym wiąże się pewna ciekawostka.

Włoski ksiądz Grandi użył tego szeregu do udowodnienia, że Bóg mógł stworzyć wszechświat (1) z niczego (0).

W podobny sposób, jak w podanym przykładzie, można sprawić, aby suma nieskończonego szeregu równała się 0 i dowolnie pomyślanej liczbie „a". Wystarczy rozważyć szereg:
a–a+a–a+a–a+…. Mamy więc do czynienia z czymś dziwnym i w pewnym okresie historii matematyki nikt nie wiedział dlaczego. Sądzę, że ci, którzy uczą się szeregów liczbowych, mogliby wyjaśnić ten paradoks.

Istnieje też problem czy zero zaliczać, czy nie zaliczać do liczb naturalnych. To również wprowadza trochę zamieszania. Fakt ten wiąże się między innymi z odróżnieniem liczb kardynalnych (tj. opisujących liczność zbiorów) od liczb porządkowych.

W ciągu 1, 2, 3, … kardynalność liczby pokrywa się z numerem miejsca, na którym stoi. Inaczej jest w ciągu 0, 1, 2, 3, …, liczba opisująca zbiory 1-elementowe znajduje się na drugim miejscu, liczba opisująca zbiory 2-elementowe na trzecim miejscu itd.

Nawiasem mówiąc, tradycyjny system rachowania nie obejmuje sytuacji, gdy przedmiotów nie ma. W życiu codziennym liczenie odbywa się 1, 2, 3, …, a nie 0, 1, 2, 3, ….

Lista obecności, kolejność podawania wyników np. w zawodach sportowych, nie uwzględnia się zera. Niemniej zero jest liczbą kardynalną (tj. liczbą elementów) zbioru pustego.

A tak w ogóle, znana jest anegdota o wybitnym matematyku polskim Wacławie Sierpińskim, który nie mógł doliczyć się walizek w podróży. Żona poprosiła go, aby sprawdził, czy mają cały bagaż, tj. 6 sztuk walizek. Profesor Sierpiński stwierdził, że zginęła 1 sztuka. Powiedział wówczas: „Liczyłem i liczyłem kilka razy, o proszę: zero, jeden, dwa, trzy, cztery, pięć – a gdzie szósta?" Tak to jest, gdy teoria spotyka się z praktyką. Decyzja, czy zaliczać zero do liczb naturalnych, czy nie zaliczać, jest po części subiektywne. Zero – prawdopodobnie wymyślili je Babilończycy, Grecy odrzucili ze swej nauki, Hindusi czcili jak bóstwo, chrześcijanie wykorzystali do walki z herezją. Żadna inna liczba w dziejach ludzkości nie spowodowała tyle zamieszania.

Mówiąc ogólnie, badania historyczne wskazują, że pojęcie liczby, przynajmniej w najprostszej postaci, pojawiło się w najwcześniejszym okresie komunikowania się ludzi między sobą.

Najnowsze odkrycia archeologiczne potwierdzają, że potrzeba liczenia pojawiła się u wielu ludów stojących nawet na niskim poziomie rozwoju. Jest więc rzeczą niemożliwą ustalić chociażby w przybliżeniu daty powstania tych pojęć. Tak więc historia liczb, a w tym historia zera, to historia ludzkości i historia nauki.

Najstarszy znak zera pojawił się jeszcze przed naszą erą. Najwcześniej prawdopodobnie stosowali go właśnie Babilończycy. Drugie historyczne oznaczenie zera można znaleźć u indiańskiego plemienia Majów. Były to jednak „lokalne wynalazki" i nie odegrały istotnej roli.

Trzeci w kolejności historycznej wynalazek zera miał miejsce w Indiach. I właśnie on odegrał istotną rolę.

W VIII wieku naszej ery dzieła matematyków hinduskich zostały przetłumaczone na język arabski. Stąd zaś w następnych wiekach przetłumaczono je na język łaciński, i tak zero pojawiło się na Zachodzie.

Trzeba było jednak dużo trudów i długiego czasu, aby zero traktować na równi z pozostałymi liczbami. Było ono ignorowane przez wiele stuleci. Jeszcze w XVIII wieku matematyk angielski J. Walhs twierdził, że zero nie jest liczbą.

W podręczniku wydanym w Krakowie w 1863 r., w rozdziale poświęconym arytmetyce napisano: „Rachowanie odprawia się dziesięcią liter, które tak się piszą: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 (uwaga: zero nie jest przed jedynką). Pierwsze dziewięć nazywają się kuczne, dlatego, że zamykają jedną albo więcej jedności; ostatnia, dziesiąta – nieliczna, gdyż sama przez się znaczy nic."

Jak widać, zero było traktowane inaczej. Spory wokół zera ustały, powiedzmy, na przełomie XVIII/XIX wieku.

Bliźniaczym bratem zera jest nieskończoność. Dlatego też w historii matematyki zero i nieskończoność występują dość często w parze.

Kłopotliwa natura zera, jak i jego moc bierze się właśnie z dziwnej mocy nieskończoności.

Nicość i wieczność to podstawa wielu poglądów filozoficznych. Dlatego też w całej historii tak filozofii, jak i matematyki te dwa pojęcia odgrywały istotną rolę (nicość – to zero, wieczność – to nieskończoność).

Ludzkość odczuwała strach przed nicością. Średniowieczni scholastycy uważali nicość za zło, a zło za nicość. Dlatego też bali się zera.

Zero – to jest także język przyrody. Wszak rachunek różniczkowy i całkowy, który opiera się na pojęciu granicy, zawiera w sobie tak zero, jak i nieskończoność. Natomiast język rachunku różniczkowego to język przyrody.

I tak o zerze można by pisać jeszcze dość długo, ale sądzę, że podana liczba faktów jest wystarczająca.

No, może tak na koniec kilka drobnych informacji z zerem w roli głównej.

W języku wojskowym określa się tzw. „punkt zerowy” wybuchu. I tak nowojorski „Ground Zero”, to właśnie miejsce, gdzie przed 11 września stały WTC. Lata 2000–2009 ogłoszono dekadą zer. Zero zapoczątkowało też własną filozofię – nihilizm. Jest to wiara, że nic nie ma wartości, celu ani znaczenia. W ostatnich czasach nabrało także znaczenia politycznego – po wypowiedzi Leszka Millera.

Współczesna zaś matematyka komputerowa nie może się obejść bez zera. Techniki do wykonania wszelkiego rodzaju obliczeń wykorzystują przecież tylko zero i jedynkę.

Dopiero niedawno ludzie zrozumieli, że zero to największy prezent, jaki matematyka mogła im podarować.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

Mistrz badań chemicznych kontra FBI

Jak wielka jest przenikliwość ludzkiego umysłu. Galileusz

Rozum w poszukiwaniu prawdy winien torować sobie drogę tylko szczytami, co wznoszą się ponad poziom zwyczajności.

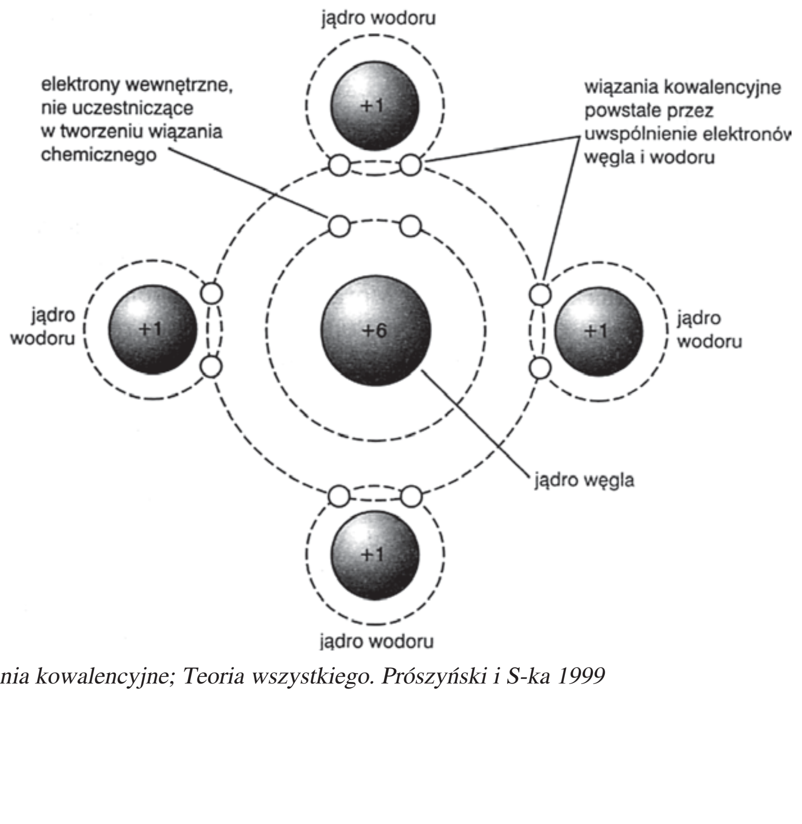
Edgar Allan Poe

Gdy niektórzy badacze pytają:
„W jaki obraz świata każą nam wierzyć takie a takie obserwacje eksperymentalne?”,
ja wolę postawić pytanie:
„Jaki jest najprostszy, ogólny i intelektualnie zadowalający obraz świata, który obejmuje te obserwacje i nie jest z nimi sprzeczny?”

Linus Pauling

Gdy Herman Heinrich Wilhelm Pauling, syn niemieckich imigrantów, w roku 1899 dyliżansem wjeżdżał do miejscowości Condon w stanie Oregon, nie przypuszczał, że pozna tam urodziwą córkę założyciela miasta, ożeni się z nią i będzie miał trójkę dzieci: dwie córki i syna. Nie przyszło mu do głowy, że jedno z tych dzieci rozsławi jego nazwisko po całym świecie. Nie doczekał chwili, gdy syn dwukrotnie stanął przed królem Szwecji, by przyjąć z jego rąk Nagrodę Nobla. Zmarł, gdy Linus miał dziewięć lat. Śmierć ojca, który bardzo szybko zorientował się, że syn obdarzony został niepospolitymi zdolnościami i dlatego starał się go odpowiednio wykształcić, pozbawiła rodzinę finansowego oparcia, a chłopca na całe życie wpędziła w emocjonalne kłopoty. Nie poważał matki, która nie potrafiła poradzić sobie zarówno z problemami materialnymi, jak i wychowawczymi. Nieprzychylne nastawienie Linusa do matki zwiększał jej negatywny stosunek do nauki syna. Chłopiec, pragnąc odciąć się od emocjonalnego chaosu, całą swoją uwagę, talenty i czas skupił na nauce.

Pierwszą wielką jego pasją były owady. Aby je zakonserwować, musiał posługiwać się chemikaliami (m.in. cyjankiem potasu do ich uśmiercania), dostarczanymi przez znajomego ojca, który podobnie jak Herman Pauling był farmaceutą. Gdy skończyła się fascynacja owadami, przyszła kolej na minerały. Były to pierwsze kontakty młodego Paulinga z chemią. Decyzję o wyborze jej jako kierunku dalszej edukacji podjął, gdy miał dwanaście lat. Stało się to w piwnicy Lloyda Jeffressa, najlepszego przyjaciela, w której Lloyd urządził pracownię chemiczną, wyposażoną we własnej roboty zestaw do przeprowadzania doświadczeń chemicznych. Linus był pod wrażeniem reakcji, podczas której z dwóch substancji powstała trzecia. To zadecydowało, że w 1917 roku, jako szesnastolatek, rozpoczął studia w Oregońskiej Wyższej Szkole Rolniczej. Była to jedyna uczelnia, na którą mógł sobie pozwolić. Podejmował się różnych prac, dzięki którym mógł opłacić naukę. Matka, przeciwna studiom syna, uważała, że jego celem powinno być utrzymanie rodziny: jej oraz sióstr. Po dwóch latach zmusiła Linusa do przerwania nauki i podjęcia pracy. Jednak nie udało się zatrzymać młodego, żądnego wiedzy człowieka w domu. Wrócił na uczelnię, gdzie zaproponowano mu stanowisko asystenta w dydaktycznym laboratorium analizy jakościowej oraz prowadzenie zajęć ze studentami, co było dowodem bardzo wysokiej oceny jego zdolności – miał wów-



Wiązania kowalencyjne; Teoria wszystkiego. Prószyński i S-ka 1999