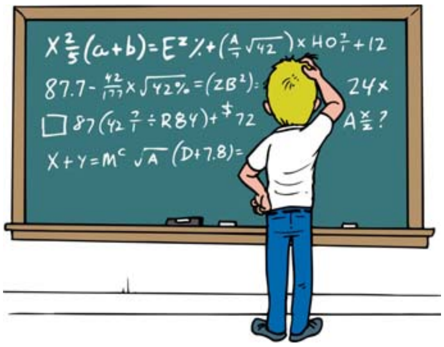


Kącik matematyczny

No cóż, samo życie narzuca potrzebę zwrócenia uwagi na pewne fakty matematyczne. I tak w tygodniku „Newsweek” (Polska) z dnia 20 lipca b.r. został zamieszczony bardzo ciekawy artykuł Bożeny Kastory „Pociąg do symetrii”. Autorka, informując o ważnych wynikach teoretycznych dotyczących symetrii, podała jednocześnie bardzo wiele przykładów z otaczającego nas świata, w których symetria odgrywa istotną rolę. Podkreśliła także, że jest ona kluczem do zrozumienia fundamentalnych praw przyrody.

Artykuł ten sprowokował mnie do zastanowienia się, co ja wiem o symetrii i co może wiedzieć o niej np. absolwent uczelni technicznej. Przykro mi to stwierdzić, ale wkrótce, przy obecnych zmianach programowych w nauczaniu matematyki, przyszły absolwent uczelni technicznej będzie wiedział niewiele. Aby bowiem zrozumieć ją i jej własności, niezbędny jest pewien zakres wiedzy z geometrii i algebry. Niestety, brak wykładu z algebry (który był dotychczas) i wiedza z geometrii w wersji śladowej nie dają możliwości dokładnego poznania i zrozumienia symetrii, nie mówiąc już o dobrym wykorzystaniu tej wiedzy.

Ach, ta symetria

U podstaw praw rządzących światem znajduje się symetria.
R. Feynman – wybitny fizyk

Chciałbym wyróżnić dwa obszary matematyki, które mają szczególne znaczenie dla zrozumienia funkcjonowania świata; system liczb zespolonych i symetria, która miała centralne znaczenie w prawie wszystkich teoriach XX wieku.
R. Penrose „Droga do rzeczywistości”

Poszukując materiałów do napisania tego artykułu, przekonałam się, że symetrii poświęconych jest wiele książek, i to niekoniecznie matematycznych. Wszak książki z krystalografii, czy też historii sztuk poświęcone ornamentom korzystają z wiedzy o symetrii. A tak przy okazji, największymi mistrzami sztuki geometrycznego ornamentu byli Arabowie. Bogactwo stiukowych ornamentów zdobiących ściany takich budowli arabskich, jak Alhambra w Granadzie, jest wprost oszałamiające. Tam też jest dużo symetrii.

Pamiętam również, jak kilka lat temu przeczytałam w „Świecie nauki” niezwykły artykuł Iana Stewarta pt. „Sztuka eleganckiego układania kafelków”. Było to cudowne połączenie matematyki i sztuki użytkowej, gdzie pojęcie symetrii odegrało kluczową rolę. Co więcej, pomimo że matematyczne podstawy symetrii i układanie kafelków opracowano już bardzo dawno temu, to dzięki dobrej wiedzy o niej ciągle dokonywane są nowe odkrycia w tym zakresie.

Symetria jest pojęciem tak matematycznym, jak i estetycznym. Ludzki umysł ma pociąg do niej i dlatego odgrywa ona ważną rolę w naszym pojęciu piękna.

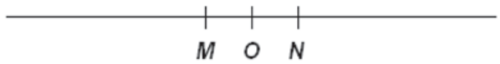
Temat jak widać jest niezwykle szeroki i nie sposób omówić go w jednym artykule. Dlatego też chciałabym po prostu zwrócić uwagę na istnienie symetrii i podać trochę faktów o niej.

Moje rozważania rozpocznę od krótkiego spojrzenia matematycznego. Mówiąc bardzo ogólnie, symetria obiektu lub układu jest dowolną transformacją (przekształceniem), która pozostawia go niezmienionym. Istotną więc rolę będzie tu odgrywać pojęcie przekształcenia o pewnych własnościach.

Na wstępie zacytuję może informacje o symetrii z „Małego słownika matematycznego”:

Symetria – przekształcenie geometryczne. Rozróżniamy symetrię względem punktu, prostej i płaszczyzny.

1) Symetria względem punktu (symetria środkowa) przyporządkowuje danemu punktowi M punkt N (obraz punktu M) względem punktu O (środek symetrii). Punkt N otrzymujemy, prowadząc przez punkty O i M prostą, a następnie znajdujemy na tej prostej po przeciwnej do M stronie punktu O punkt równoodległy od punktu O (ON = OM).



Prostym przykładem jest okrąg symetryczny względem swojego środka.

2) Symetria względem prostej zwanej osią S (symetria osiowa) przyporządkowuje punktowi M punkt N na prostej prostopadłej do osi S i przechodzącej przez punkt M; położony symetrycznie względem punktu przecięcia tych prostych. Przykładem może być także okrąg symetryczny względem swoich średnic.

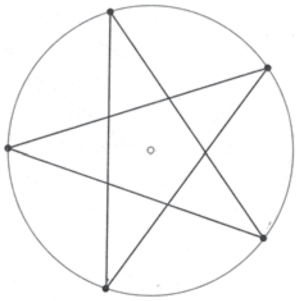
3) Symetria względem płaszczyzny przyporządkowuje każdemu punktowi M punkt N na prostej prostopadłej do płaszczyzny i przechodzącej przez M; położony symetrycznie względem punktu przebicia tej płaszczyzny przez tę prostą. Przykładem może byś sfera symetryczna względem dowolnej płaszczyzny przechodzącej przez jej środek.

W związku z podanymi symetriami wyróżnia się 4 podstawowe: symetrię zwierciadlaną, symetrię obrotową, symetrię środkową i symetrię przesunięć. A więc może kilka zdań o każdej z nich.

Symetria zwierciadlana, to symetria względem prostej na płaszczyźnie lub względem płaszczyzny w przestrzeni. Obrazy zwierciadlane powstają tam, gdzie znajdują się zwierciadła, czy to będą jeziora, w których odbija się krajobraz, czy lustro, w którym się przyglądamy. Z tego faktu czynią użytek tak natura, jak i malarze. Stąd istnieje bogata literatura o symetrii zwierciadlanej płaskorzeźb i obrazów. Co więcej, ten typ symetrii oznacza na ogół w sztuce spoczynek i skrępowanie, zaś asymetria – ruch i zwolnienie więzów.

Z symetrią zwierciadlaną związana jest również matematyczna filozofia prawego i lewego. Jest to jednak temat dość obszerny i nie będę go tu omawiała. Symetrię zwierciadlaną spotykamy nie tylko w przyrodzie czy malarstwie, ale także w wielu frazach muzycznych.

A teraz kilka faktów o symetrii obrotowej. Obrót o pewien kąt może być dookoła punktu na płaszczyźnie, czy dookoła pionowej osi w przestrzeni. Mówiąc dość ogólnie, figura ma symetrię obrotową, jeżeli obroty dookoła punktu, czy prostej nakładają figurę na nią samą. Na przykład obrót o 90^{o} nie zmienia kwadratu, zaś pięciokąt foremny po obrocie o 180^{o} zostanie takim samym pięciokątem. Okrąg ma oczywiście nieskończenie wiele symetrii obrotowych. Ciekawym przykładem jest pentagram (pięciokąt gwiaździsty), którym doktor Faust zaklął Mefistofelesa.



Ma on 5 symetrii obrotowych dookoła swojego środka.

Szczególnym przypadkiem symetrii obrotowej (obrót o 180^{o}) jest symetria środkowa.

Można też ją zrealizować, wykonując 2 symetrie osiowe o osiach prostopadłych do siebie. Niezwykle ważnym rodzajem symetrii są przesunięcia równoległe (translacje). Mówiąc ogólnie, jest to przekształcenie przesuwające obiekty (bez obracania ich). Chcąc je zrozumieć, wystarczy pomyśleć o ścianie łazienki wyłożonej tymi samymi kafelkami. Jeżeli weźmiemy jedną płytkę i przesuniemy ją poziomo na pewną odległość, to płytka ta będzie pasować do sąsiedniej płytki. To samo otrzymamy, gdy będziemy przesuwać ją pionowo lub gdy utworzymy kombinację przesunięć poziomych, czy pionowych. Można więc o przekształceniach równoległych myśleć jako o przekształceniach, w których jednostki powtarzają się tak jak regularny ciąg kafelków w łazience. Przykładów, w których występują przesunięcia, można podać bardzo, bardzo wiele, ale niezwykłym będzie zawsze „Bolero" Maurycego Ravela. Tam też są przesunięcia równoległe.

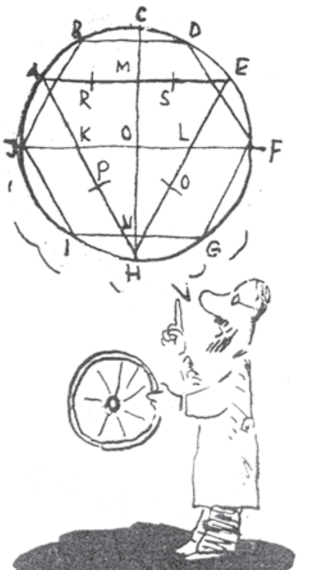
Podsumowując te wszystkie rozważania, możemy powiedzieć, że figura jest symetryczna, gdy po zastosowaniu pewnych symetrii pozostaje sobą. Liczba takich przekształceń może być tak skończona, jak i nieskończona. I tak na przykład wspomniany już pentagram ma 10 symetrii, które tworzą tzw. grupę przekształceń. Dlatego też, chcąc mieć dokładniejszą wiedzę o symetrii, należy zapoznać się z teorią grup. Jest to już obszar algebry wyższej.

No cóż, o symetrii można pisać naprawdę długo, bowiem spotykamy ją prawie wszędzie, tak w przyrodzie, sztuce, fizyce, chemii, biologii, jak i oczywiście w matematyce. Symetrię przyrody można znaleźć w każdej skali, od struktury cząstek subatomowych do całego wszechświata. I tak symetryczne są wirusy, a najpospolitsze, jak np. wirusy grypy, mają kształt helisy (linii śrubowej), czy dwudziestościanu foremnego, jak np. wirus opryszczki.

Embrion żaby rozpoczyna życie jako kulista komórka, ale potem traci tę symetrię. W wyniku dalszego rozwoju (jej dynamiki) symetria ta ulega częściowo załamaniu. Część symetrii jednak pozostaje. Dlatego też ważną rolę zaczyna odgrywać matematyka łamania symetrii.

Okazało się, że łączy ona zjawiska, które na pierwszy rzut oka robią wrażenie odległych. Tak to jednak zwykle bywa, ta sama matematyka abstrakcyjna, a odmienne realizacje fizyczne czy biologiczne.

Wykrywanie otaczającej nas symetrii, to przyjemność nie tylko estetyczna. Okazała się ona niezastąpiona do zrozumienia wielu faktów otaczającego nas świata. Można więc też mieć nadzieję, że ostatnie osiągnięcia teoretyczne z symetrii wskażą drogę do struktur i symetrii, których istnienia nikt dotąd nie podejrzewał. Banalne staje się stwierdzenie, że tworzenie modeli, badanie ich, wyciąganie wniosków dotyczących świata, który nas otacza, najlepiej udaje się przy użyciu matematyki.



Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

PS. Jak zwykle matematyką można się także bawić. Ostatnio przeczytałam, że opracowano „Tańce dla oka i umysłu", wykorzystujące różne rodzaje symetrii.

Fot. Krzysztof Krzempek