

Kącik matematyczny



Ach, ten grudzień – miesiąc niezwykły i wyjątkowy. Na myśl o nim czujemy radość i chęć zabawy. Dlatego też w kąciku matematycznym pojawi się ta część matematyki, która jednocześnie uczy i bawi. Tworzą ją gry, łamigłówki logiczne i różnorodne zadania. Takie sobie rozkosze łamania głowy.

Zabawy z matematyką, czyli zrób prezent szarym komórkom

Tylko grający, stojąc przy pulpicie,
O kompozycji mówili warunkach,
O tym wcieleniu życia w sztuki życia,
Gdzie kalkuł w duchu i duch sam w rachunkach.

C. K. Norwid „Promethidion”

Szcześnie to 10% natchnienia i 90% trudu.

Thomas Edison

Gry i łamigłówki logiczne są przyjemnym, praktycznym i kształcącym sposobem spędzania czasu. Są źródłem radości i satysfakcji. Pozwalają rozwinąć umiejętność logicznego myślenia i rozszerzyć wyobraźnię.

Zabawa jest jedną z podstawowych potrzeb człowieka, zaś zabawa z matematyką ma swoje dodatkowe, niezaprzeczalne walory. Kształci ona myślenie, zdolności kojarzenia faktów oraz powiększa wiedzę. Często uczy matematyzacji otaczającej nas rzeczywistości, bez odwoływania się do zawiłych teorii.

Wiele gier można wykonywać rodzinnie czy też w grupie przyjaciół. To zaś zacieśnia kontakty emocjonalne, tak niezwykle ważne w obecnych czasach.

Gry i rozrywki matematyczne były znane już w czasach starożytnych. Potwierdzają to zarówno historia matematyki, jak i odkrycia archeologiczne.

I tak ponad 3000 lat temu nauczyciele matematyki w starożytnym Babilonie zaczęli umieszczać na pokrytych piśmem klinowym tabliczkach różne łamigłówki, żeby przykuć uwagę uczniów.

Egipcjanie również pisali na swoich papirusach różne ciekawe zadania. Zadania rozrywkowe były rozpowszechniane w starożytnej Grecji i Rzymie, a później w wiekach średnich na zachodzie Europy.

Nawet wielki Archimedes zamieścił w swoich dziełach wiele zadań logicznych (najczęściej o charakterze geometrycznym).

Współczesne czasy także dostarczają mnóstwa ciekawych zadań, łamigłówek logicznych, czy różnego rodzaju gier.

Ostatnio przeczytałam w pewnym miesięczniku, że studenci i pracownicy naukowcy Instytutu Matematyki w Berkeley (USA) kilka razy w roku organizują turniej gier matematycznych. No, a coż można powiedzieć o szaleństwie Sudoku, które jest inną wersją od dawna znanych w matematyce kwadratów magicznych. To potwierdza, że ciągle istnieje potrzeba pewnego trudu intelektualnego, szczególnie, gdy trzeba, jak to mówią, „dobrze pogłównkować”.

Niełatwo jest omówić w jednym krótkim artykule ten temat, tym bardziej, że istnieją książki wybitnych matematyków, po-

święcone tym problemom. Wobec tego moim celem jest jedynie zwrócenie uwagi na to, że jest taki obszar matematyki, który nie tylko uczy, ale i bawi.

Postanowiłam więc podać pewną liczbę zadań i łamigłówek logicznych. Są one związane częściowo z historią matematyki (ale nie tylko). Świadczą też o tym, że takie potrzeby istniały na każdym etapie rozwoju ludzkości. Zaczniemy zatem wędrówkę po zadaniach.

Zadanie sprzed 4000 lat

Sto miar ziarna należy podzielić między 5 robotników tak, aby drugi otrzymał o tyle miar więcej od pierwszego, o ile trzeci otrzymał więcej od drugiego, zaś czwarty od trzeciego, a piąty od czwartego. Prócz tego dwóch pierwszych robotników razem powinno otrzymać 7 razy mniej miar ziarna niż trzej pozostali.

Zadanie z papirusu Ahmesa

7 osób ma po 7 kotów. Każdy kot zjadł po 7 myszy. Każda mysz zjadła po 7 kłosów jęczmiennych. Z każdego kłosa może wyrosnąć ziarna po 7 miar. Jaki ciąg liczb wynika z tego zadania i ile wynosi ich suma?

Zadanie z czasów rzymskich

Pewien Rzymianin, umierając, zrobił zapis na rzecz żony i oczekiwanego dziecka. W razie przyjścia na świat chłopca ten miał otrzymać 2/3 spadku, a matka 1/3 spadku. W razie przyjścia na świat dziewczynki, matka miała otrzymać 2/3 spadku, a syna – 1/3 spadku. Urodziły się jednak bliźnięta – chłopiec i dziewczynka. Jak podzielić spadek zgodnie z intencjami Rzymianina?

Zagadka Fibonacciego (ok. 1180–1240)

Dwa ptaki wylatują w tym samym momencie ze szczytów dwóch wież odległych o 50 m. Wysokość jednej wieży to 30 m, a drugiej – 40 m. Lecąc z tą samą prędkością, ptaki dolatują w tym samym momencie do fontanny usytuowanej na prostej łączącej podstawy obu wież. W jakich odległościach od wież znajduje się fontanna?

A teraz przejdźmy do zadań bardziej współczesnych. Autor „Alicji w krainie czarów” Lewis Carroll, który naprawdę nazywał się C. L. Dodgson (z wykształcenia matematyk) jest autorem zwiariowanego i tragicznego zadania. Oto ono:

Zadanie:

W pewnej bitwie spośród 100 piratów 70 straciło 1 oko, 75 jedno ucho, 80 jedną rękę i 85 jedną nogę. Ilu co najmniej stra-

ciło oko, ucho, rękę i nogę jednocześnie? (No cóż, jeśli znamy teorię zbiorów, to odpowiedź jest prosta).

Zadanie: (Pod którym drzewem jest skarb?)

Pewien milioner-dziwak pozostawił taki testament:

W ogrodzie moim rośnie 6 owocowych drzew: 1 – czereśnia, 2 – grusza, 3 – jabłoń, 4 – orzech, 5 – śliwa, 6 – wiśnia. Pod jednym z tych drzew zakopałem skarb, wymieniając: czereśnia – 1, grusza – 2, jabłoń – 3, orzech – 4, śliwa – 5, wiśnia – 6, śliwa – 7, orzech – 8, jabłoń – 9, grusza – 10, czereśnia – 11, grusza – 12, jabłoń – 13, orzech – 14, śliwa – 15, wiśnia – 16 itd. Skarb leży pod drzewem 1004.

Tylko naiwny będzie chodził od drzewa do drzewa i wymieniał kolejne liczby. Sprytny najpierw zrobi obliczenia, a potem od razu skieruje się do drzewa, pod którym leży skarb. Pod którym drzewem leży skarb?

Z okazji świąt proponuję następującą łamigłówkę:

Łamigłówka noworoczna

Czterej koledzy: Edek, Franek, Jurek i Hubert poszli wspólnie, razem z żonami, na bal noworoczny. Z początku każdy tańczył ze swoją żoną, ale wkrótce pary się pomieszały. Basia tańczyła z Edkiem, Alicja z mężem Karoliny, Dorota z mężem Alicji, Franek z żoną Jurka i Jurek z żoną Edka. Proszę rozsupłać tę „mieszanię par” i określić, kto z kim był zaślubiony i kto z kim tańczył.

Sądzę, że warto także przypomnieć działania arytmetyczne na liczbach. Wobec tego kilka łamigłówek arytmetycznych.

Łamigłówka 1

Jakie cyfry podstawić pod x i y, aby prawdziwy był zapis.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

Łamigłówka 2

Oto mnożenie, gdzie cyfry od 0 do 4 oznaczono kółkami, zaś cyfry od 5 do 9 oznaczono krzyżykami.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

Jakie to mnożenie?

Łamigłówka 3

Z całego dzielenia widoczne są tylko dwójki. Jakie to dzielenie?

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

Łamigłówka 4

Oto układ sześciu działań arytmetycznych:

$$\begin{array}{ll} A \square A = B & E \vee D = F \\ B \circ C = D & F \circ B = B \\ D \nabla A = E & C \square D = D \end{array}$$

Litery oznaczają cyfry od 0 do 9; prostokąt, koło i trójkąt to symbole trzech spośród czterech prostych działań arytmetycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie). Jak wygląda układ po rozszyfrowaniu?

A teraz coś dla interesujących się informatyką. Istotą wszelkich obliczeń komputerowych jest tzw. system dwójkowy. W układzie dwójkowym podstawą rachunku jest liczba 2, tak jak w układzie dziesiętkowym (którego używamy na co dzień) jest liczba 10. Dwójkowy system liczenia jest również pozycyjny, tak jak dziesiętkowy, ale jego rzędami są nie liczby: 1, 10, 100, 1000, ..., 10^n , lecz liczby: 1, 2, 4, 8, ..., 2^n . W układzie dwójkowym posługujemy się tylko dwiema cyframi: 0 i 1. I tak np. 15 (w układzie dziesiętnym), to $8 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$ zapisze się w systemie dwójkowym jako 1111.

A oto liczby od 1 do 10 zapisane w układzie dwójkowym.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

W układzie dwójkowym działanie dodawania jest: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 10$ (czyli 2) zaś mnożenia: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

Troszkę trudniej wygląda działanie odejmowania czy dzielenia, więc pozostawię to zainteresowanym.

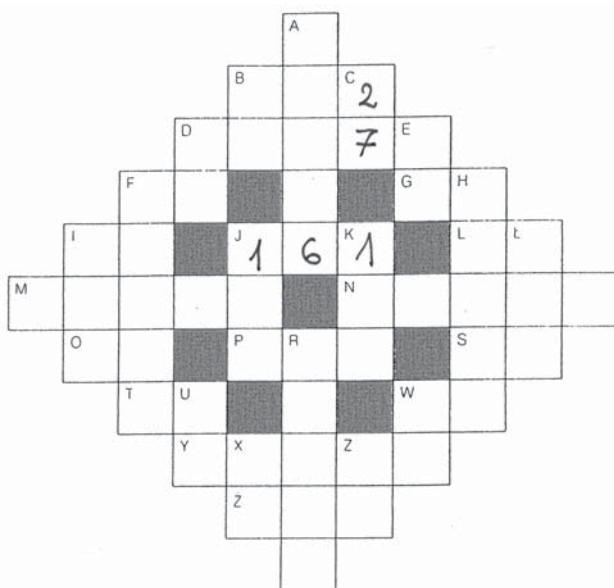
A teraz ćwiczenie:

- 1) Zapisz liczbę roku 2008 czy 2009 w układzie dwójkowym.
- 2) Zapisz w systemie dwójkowym $43 + 26 = 69$.
- 3) Co stanie się z liczbą napisaną w układzie dwójkowym, jeżeli do ostatniej cyfry dopiszemy zero, czy dwa zera?
- 4) Równanie $11x^{10} - 1010x + 11 = 0$ jest napisane w systemie dwójkowym. Rozwiąż je i wynik rozwiązania podaj w systemie dwójkowym.

Na zakończenie tych zabaw proponuję jeszcze dwie krzyżówki liczbowe (ale nie w systemie dwójkowym). Oto one:

Krzyżówka nr 1

Dla ułatwienia rozwiązania wpisane są dwie liczby.



Poziomo:

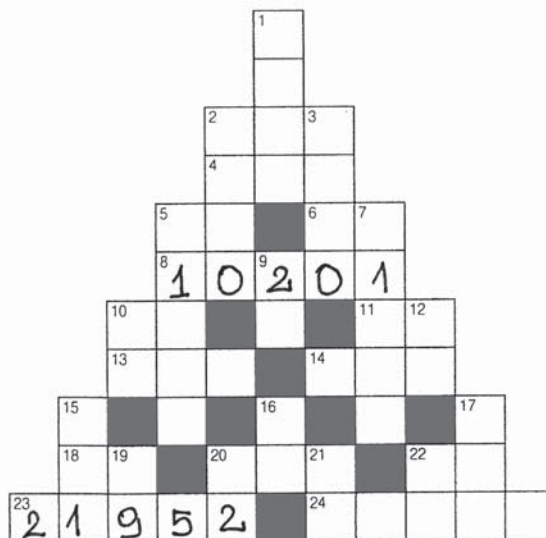
- B – dwanaście razy S poziomo
- F – G poziomo minus Z pionowo
- J – siedem razy I poziomo
- M – sześć G poziomo
- N – kwadrat J poziomo
- O – o trzy więcej niż S poziomo
- P – dwa razy Ł pionowo
- T – dwa razy E pionowo
- W – dwa razy X pionowo
- Y – Ł pionowo razy W pionowo
- Z – B poziomo minus L poziomo

Pionowo:

- A – D poziomo plus B poziomo
- C – B poziomo podzielone przez F poziomo
- D – jedna szóstka B pionowo
- E – połowa T poziomo
- F – dwa razy D poziomo
- H – M poziomo minus F pionowo
- I – P poziomo minus J pionowo
- J – o trzy więcej niż J poziomo
- K – czterysta minus I pionowo
- R – kwadrat Ł pionowo
- U – trzy razy C pionowo
- W – to samo co W poziomo
- X – połowa W pionowo
- Z – G poziomo minus F poziomo

Krzyżówka nr 2

Dla ułatwienia rozwiązania wpisane są dwie liczby.



Poziomo:

- 2 – to samo co 20 poziomo
- 4 – trzynaście razy 12 pionowo
- 5 – średnia arytmetyczna 9 pionowo i 10 poziomo
- 6 – patrz siedem pionowo
- 8 – dwa poziomo do kwadratu
- 10 – patrz 23 poziomo
- 11 – podwojone 6 poziomo
- 13 – 14 poziomo minus 16 pionowo
- 14 – 24 razy 22 pionowo
- 18 – podwojone 21 pionowo
- 20 – to samo co 2 poziomo
- 22 – trzy razy 21 pionowo
- 23 – sześć 10 poziomo
- 24 – 5 poziomo razy 17 pionowo

Pionowo:

- 1 – 2 pionowo plus 6 poziomo
- 2 – podwojone 13 poziomo
- 3 – podwojone 4 poziomo
- 5 – 7 pionowo plus 12 pionowo
- 7 – 4 poziomo razy 6 poziomo
- 9 – patrz 5 poziomo
- 10 – średnia arytmetyczna 5 poziomo i 10 poziomo
- 12 – patrz 4 poziomo
- 15 – 2 poziomo plus 4 poziomo
- 16 – 5 razy 20 pionowo
- 17 – 18 poziomo razy 19 pionowo
- 19 – patrz 17 pionowo
- 20 – patrz 16 pionowo
- 21 – patrz 18 poziomo
- 22 – patrz 14 poziomo

Uff, i to by było „na tyle”. Przyjemnej i radosnej zabawy
życzy

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

P.S. Rozwiązania zostaną podane w następnym numerze.