

Kącik matematyczny



O chaosie napisano już wiele książek i artykułów naukowych, ale wciąż pojawia się coś na ten temat. I tak oto, gdy kryzys ekonomiczny stał się faktem, to próbując zrozumieć i wyjaśnić go, sięga się również do teorii chaosu. Informacje na ten temat można znaleźć w artykule pt. „Chaos i połów dzienny” („Świat nauki”, kwiecień 2009). Sądzę, że i w kąciku matematycznym przyszedł czas na troszkę wiedzy o chaosie.

Chaos odkrywany na nowo

Chaos – stan totalnego zamętu

Słownik Webster's New Encyclopedic Dictionary

Wiemy, że proste równania mogą mieć proste rozwiązania, ale mogą mieć również i skomplikowane. Podobnie złożone równania mogą mieć, oprócz skomplikowanych, proste rozwiązania. W ten oto sposób matematycy zaczynają patrzeć na porządek i chaos jako na dwa odrębne przejawy zasadniczego determinizmu. Jednak żadne z nich nie istnieje odrębnie. Tak jak harmonia i dysonans łączą się, tworząc piękno muzyczne, tak samo porządek i chaos łączą się w piękno matematyczne.

Ian Stewart – matematyk

Nie tylko w badaniach naukowych, lecz i w codziennym świecie polityki i gospodarki byłoby nam wszystkim lepiej, gdyby więcej ludzi uświadamiało sobie, że proste układy nie muszą koniecznie posiadać prostych właściwości dynamicznych.

Robert May – ekolog – matematyk

W wspomnianym wcześniej artykule, który przede wszystkim omawia sylwetkę matematyka – ekologa Georga Sugihary, znajdujemy następujące informacje: „Posługując się teorią złożoności i chaosu, G. Sugihara wykazał, że dotychczasowa praktyka w rybołówstwie prowadzi do powstania niestabilnych populacji ryb, narażonych na gwałtowny rozwój lub nagły zanik nawet wtedy, gdy pożywienia jest pod dostatkiem. Większość systemów zarządzania rybołówstwem opiera się na założeniach, że układ jest stabilny. Niestety, ekosystemy nie są stabilne. G. Sugihara, traktując łowiska ryb jako układ chaotyczny, porównuje je z rynkami finansowymi. Podobieństwa te w wynikach jego prac były tak znaczące, że został on zatrudniony w latach 1996–2001 przez Deutsche Bank. Matematyk ten z powodzeniem przewidywał krótkotrwałe fluktuacje rynków. Stosował on te same techniki analityczne, których użył później w pracy związanej z sardynkami.”

No cóż, marzeniem każdego naukowca jest odkryć nowe prawa przyrody, a podejście matematyczne daje duże możliwości. I dlatego matematyka polega również na tworzeniu ładu z chaosu.

W dawnych czasach chaos odnosił się do ciemnej nieforemnej otchłani, próżni, z której wyłonił się Wszechświat. Kosmologia starożytnych Greków traktuje chaos zarówno jako pierwotną pustkę Wszechświata, jak i świat podziemny, w którym przebywali zmarli. W późniejszych czasach chaos był traktowany jako pierwotna bezkształtna masa, z której Stwórca wy-modelował uporządkowany świat. Porządek jest utożsamiany z dobrem, a nieporządek ze złem. Porządek i chaos uważane są

za skrajne przeciwieństwa, bieguny, pomiędzy którymi umieszczono nasze obrazy świata. Ludzkość zawsze dążyła do zrozumienia praw przyrody, a tym samym do wydobywania porządku z chaosu.

W latach 70. dwudziestego wieku pojęcie chaosu nabrało w nauce nowego znaczenia. Stało się tak dzięki rozwojowi metod komputerowych, jak i z racji potrzeb modelowania wielu zjawisk.

Nie brak w przyrodzie nieregularności, a niektóre z nich okazują się fizycznymi przejawami matematyki chaosu.

Burzliwy przepływ cieczy, nieregularności rytmu serca, wzrost populacji owadów, kapanie wody z ekranu, metabolizm komórkowy, zmiany pogody, rozchodzenie się impulsów nerwowych, oscylacje obwodów elektrycznych, odbijanie się kuli bilardowej – to zaledwie kilka zagadnień, do których zastosowano matematykę chaosu.

W 1986 r. na międzynarodowej konferencji o chaosie, zorganizowanej w Londynie, przyjęto następującą definicję:

„Chaos – stochastyczne zachowanie występujące w układzie deterministycznym” (tu stochastyczne oznacza przypadkowe).

Teoria chaosu uczy, że układy podlegające prostym regułom mogą zachowywać się w zadziwiająco skomplikowany sposób. Stają się one nagle tak złożone, że prostota zanika. Złożoność zaś układu, to ogromna ilość informacji potrzebnych do jego opisu. Gdy proste prawa rządzą układami o dużej liczbie zmiennych, podstawowy porządek ulega rozmyciu.

Należy patrzeć bardzo uważnie, aby zrozumieć, że świat jest złożony, a ta złożoność ma proste przyczyny. Świadczy o tym wiele przykładów z matematyki stosowanej, a w tym z teorii układów dynamicznych. Spotykamy się tam z tzw. „chaosem deterministycznym”. Występuje on chociażby w „iteracji logistycznej”. Iteracja ta była od dawna wykorzystywana przez biologów. Służyła jako prosty model opisujący zmiany populacji badanego gatunku, będącego wynikiem dwóch przeciwstawnych tendencji: rozrostu i wymierania. Organizmy, konsumując zasoby takie jak pożywienie, powodują śmierć innych organizmów. W prostym modelu te inne organizmy to po prostu reszta populacji. Tak więc liczba zgonów jest proporcjonalna na dwa różne sposoby. Krótko mówiąc, przeprowadzone rozważania dały właśnie wzór na tzw. „iterację logistyczną” postaci:

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t)$$

(a – parametr, x_t , x_{t+1} opisuje stan populacji w kolejnych krokach t , $t+1$).

Wzór ten kryje w sobie wiele niespodzianek i złożoność. W zależności od parametru „ a ”, otrzymamy wiele całkowicie róż-

nych typów jego rozwiązania. Dla $a = 1$ i $x_0 = 1,5$ ciąg iteracyjny dąży do jednego punktu stałego, zaś dla $a = 3$ oscyluje pomiędzy dwiema wartościami. Natomiast dla $a = 3,9$ otrzymujemy iterację, która generuje chaos. Wówczas to ciąg ten w istotny sposób zależy od punktu początkowego x_0 . To właśnie ta niezwykła czuła zależność od warunków początkowych charakteryzuje chaos. Model, w którym najmniejsze zaburzenie w danych początkowych prowadzi do różnych wyników, czyni komputer bezsilnym. Czułość iteracji logistycznej dla niektórych wartości parametru „a” jest w istocie tak wielka, że wyniki zależą od tego, na jakim komputerze wykonuje się obliczenia, i od wyboru oprogramowania. Duże różnice w x_t , wywołane przez bardzo drobne różnice w x_0 , charakterystyczne dla zjawisk chaotycznych, nazywa się w literaturze „efektem motyla”. Nazwa ta pochodzi z artykułu E. N. Lorenza (meteorologa – matematyka) pt. „Czy trzepnięcie skrzydła motyla może wywołać tornado w Teksasie”. Odkrył on dziwne zachowanie w badaniu prostych modeli służących do przepowiadania pogody. Podczas przeprowadzonych dwukrotnie obliczeń zauważył, że wyniki uzyskane za drugim razem znacznie różniły się od tych, które uzyskał za pierwszym razem. Po dokładniejszej analizie odkrył przyczynę tej różnicy. To ogromna czułość na zmiany w warunkach początkowych wywołała zmiany w dalszych obliczeniach. Stąd obrazowo stwierdził, że trzepotanie skrzydeł jednego motyla dzisiaj, może wywołać po miesiącu tornado („efekt motyla”).

Równanie logistyczne jest ważne również z tego powodu, że po raz pierwszy nastąpiło tam zetknięcie teorii chaosu z eksperymentem. Niestety, dynamika chaotyczna wprowadza całkowicie nowe i często trudne problemy przy analizie i interpretacji danych doświadczalnych.

Zastosowanie chaosu w obecnych czasach odegrało też znaczną rolę między innymi w medycynie, np. w epidemiologii, analizie fal mózgowych czy badaniach nad nieregularnościami rytmu serca.

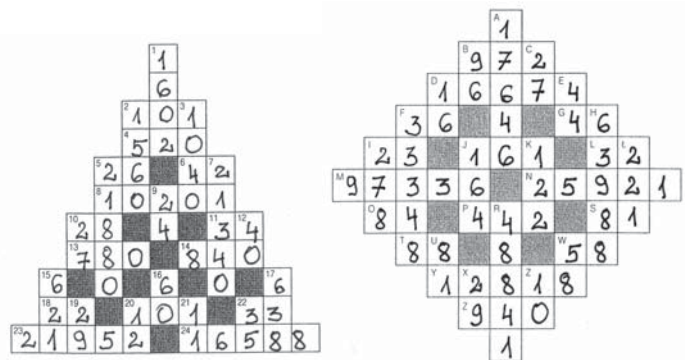
Niestety, sama teoria chaosu wymaga jednak bardzo dobrej wiedzy matematycznej (w szczególności z układów dynamicznych). Dlatego poprzestanę na podanych tu informacjach.

Celem moim było jak zwykle zwrócenie uwagi na niezwykłą rolę matematyki w naszym życiu.

Krystyna Nowicka
Studium Nauczania Matematyki

PS. Każdy, kto posługiwał się mikserem, trzepaczką do piany lub malakserem, wykonywał w istocie doświadczenie w zakresie dynamiki chaosu.

Zgodnie z obietnicą podaję rozwiązanie krzyżówek nr 1 i 2 z numeru 12/2008 „Pisma PG”



Śladami geniuszy

Nudny wykładowca i genialny odkrywca

Bertha Roentgen

- *Niemalą jest rzeczą stać się kimś sławnym, lecz ludzie za mało zdają sobie sprawę z tego, ile pracy i niepokoju ta sława przynosi.*

Ernest Rutherford

- *Wyznaczał on początek nowej epoki sukcesów fizyki, w której niemal nieprzerwanie miały następować fundamentalne odkrycia.*

Wilhelm Conrad Roentgen

- *Nie myślałem. Badałem.*

Jakże często się zdarza, że wielu ludzi patrzy na jakieś zjawisko, ale tylko nieliczni je świadomie zauważają i potrafią dostrzec jego znaczenie. Tak było w przypadku promieniowania elektromagnetycznego. Cały świat fizyki zainteresowany był elektrycznym przewodnictwem gazu pod niskim ciśnieniem, wszyscy badali zjawisko fluorescencji, które

wówczas powstaje, ale tylko jedna osoba dokonała fundamentalnego odkrycia.

Gdy Wilhelm Conrad Roentgen przeprowadzał doświadczenia z promieniami katodowymi, emitowanymi przez lampę elektropromieniową Crookesa, wiedział, podobnie jak inni fizycy jego czasów, że są one wykrywalne dzięki fluorescencji, spowodowanej emisją światła na niektóre



Wilhelm Conrad Roentgen. Reid S., Fara P., Kompendium. Wiedza w pigułce. Firma Księgarska Jacek i Krzysztof Olesiejuk 2005

substancje. Wiedział, że katoda wysyła jakieś promienie, nie wiedział jednak, co to są za promienie. Wiedział, że zjawisko fluorescencji istnieje tylko wówczas, gdy włączona jest lampa elektryczna, a światło pada na ekran pokryty specjalną substancją chemiczną. Promienie katodowe przenikają powietrze na odległość nie większą niż 2–3 centymetry. Świecenie substancji fluorescencyjnej zanika, gdy odległość jest większa, ponieważ pochłanianie jest przez cząsteczki powietrza.

Roentgena interesowała zdolność przenikania promieniowania katodowe-