



## Kącik matematyczny



Początek Nowego Roku obfituje w ogromną ilość przepowiedni, horoskopów, postanowień i życzeń. Rzadko jednak spotyka się szczegółową analizę minionego roku. Kto z wierzących chociażby w horoskopy zastanawia się pod koniec roku nad ich sprawdzalnością?

Owszem podaje się pewne zaistniałe fakty z polityki, sportu, czy kultury, ale bez dokładniejszych badań, wniosków, czy ocen. Kto wie, może jednak pozwoliłoby to na bardziej rozsądne podchodzenie do przyszłości i uchroniłoby od wielu złych decyzji, czy wiary w przepowiednie.

W tym wszystkim zaś potrzebna jest pewna wiedza z matematyki. Stąd czas w kąciku matematycznym na troszkę informacji z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki.

## Prawidłowość czy przypadek? – Matematyka niepewności

*Poszukujemy w świecie nowych prawidłowości, nowych reguł i nowych niepewności*  
Ingresoll (astronom)

*Ludzie przywiązują nadmierną wagę do zbiegów okoliczności i dają się przez to ogłupiać*  
J.A. Paulos (matematyk)

*Łatwiej jest naśladować głupstwa przymykając oczy na niedorzeczność niż myśleć*  
Wiliam Cowper

Newton i jego następcy udowodnili, że matematyka może być bardzo skutecznym sposobem zrozumienia prawidłowości natury. Stworzony przez nich rachunek różniczkowy i całkowy pozwolił zrozumieć nie tylko wiele zjawisk przyrody, ale spowodował też ogromny rozwój techniki. Każdy latający samolot, każdy jadący samochód, każdy wiszący most itd. zawdzięcza jemu swoje istnienie. Spowodowało to poszukiwanie prawidłowości i pewnych reguł w każdym napotkanym zjawisku.

Niestety w naturze spotykamy również wiele nieregularności i zjawisk losowych. Powstaje pytanie: czy można by taką niepewność opisać liczbami? Odpowiedź na to daje właśnie rachunek prawdopodobieństwa, a w szczególności jego gałąź stosowana – statystyka.

To niezwykle, że w zdarzeniach losowych są jakieś wzorce liczbowe. Umożliwiają one snucie przewidywań, ale dotyczących jedynie zajścia jakiegoś zdarzenia lub nie. Nie pozwalają jednak przewidzieć, kiedy to nastąpi.

Prawdopodobieństwo uczestniczy w naszym życiu na wiele sposobów. Najłatwiej go zrozumieć uprawiając jakieś gry. Spotykamy je również w statystycznych opisach wielu spraw codziennych (urodziny, zgon, wypadki itp.).

W tym coraz bardziej złożonym świecie pełnym zbiegów okoliczności, zalewających informacji jest potrzeba uporządkowania. Dlatego niezbędne jest umiejętne przekazywanie wiedzy o testach statystycznych, przedziałach ufności, prawdopodobieństwie warunkowym, niezależności zdarzeń, sztuce szacowania doświadczeń, czy rozkładach prawdopodobieństwa.

Podobnie jak logika rachunek prawdopodobieństwa jest przydatny nie tylko matematykom. Nie należy jednak zapominać, że wielu gorliwców wiary w przypadki nie da się nawrócić na kurs rachunku prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo jest obecnie jedną z najczęściej stosowanych technik matematycznych. Wykorzystuje się je tak w nauce jak i medycynie w celu upewnienia się, że wnioski wyciągane z obserwacji nie obrazują pozornych prawidłowości.

Teoria prawdopodobieństwa wykorzystywana w sposób właściwy staje się bardzo użytecznym narzędziem również w ocenie ryzyka pewnych zjawisk.

Prawdopodobieństwo – szansa na zdarzenie czegoś, zaś teoria prawdopodobieństwa, to teoria niepewności opisanej liczbami. I tak prawdopodobieństwo mierzy się w skali od 0 do 1. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0, zaś zdarzenia pewnego wynosi 1. Gdy prawdopodobieństwo jest równe 0,1, to możemy mówić o małym prawdopodobieństwie natomiast, gdy jest równe 0,9 o dużym.

Im więcej wiemy o rachunku prawdopodobieństwa, tym mniej dziwią nas rzekomo niemożliwe zbiegi okoliczności. Istnieje prosta zasada, która gwarantuje, że pewne zbiegi okoliczności muszą wystąpić.

Niestety większość z nas nie jest przyzwyczajona do myślenia probabilistycznego i podchodzi do życia z osobistą mięszanką uczuć, przekonań i intuicji. Powoduje to przykładanie nadmiernej wagi właśnie do nieistotnych zbiegów okoliczności i wiary w niezwykle moce.

Co więcej, pojawia się silna skłonność do odnoszenia wszystkiego do siebie i podatność na relacje mediów. Użyteczność rachunku prawdopodobieństwa najłatwiej wyjaśnić na jej części praktycznej statystyce. Jest ona niezbędnym miernikiem rzeczywistości i wywiera znaczny wpływ na nasze życie.

Statystyka – to jedna z najważniejszych technik analitycznych w medycynie. Żaden lek nie zostanie dopuszczony do użytku, ani żadna metoda leczenia nie będzie stosowana w szpitalach dopóki badania kliniczne nie dowiodą, że ów lek, czy metoda są wystarczająco bezpieczne i skuteczne. W podejmowaniu takich decyzji służą metody, które polegają na porównywaniu danych z modelami statystycznymi i oce-

nie prawdopodobieństwa tego, że zaobserwowane efekty są dziełem przypadku. I tak jeżeli prawdopodobieństwo tego jest mniejsze powiedzmy od 0,01, to z prawdopodobieństwem 0,99 dane nie są wynikiem przypadku. Oznacza to, że zaobserwowany efekt jest znaczący na poziomie 99%. Dlatego metody te pozwalają określić ze znaczną pewnością, które terapie są skuteczne, a które wywołują efekty uboczne i w związku z tym nie powinny być wykorzystywane.

Stąd umiejętność i konieczność analizy próby danych jest najbardziej potrzebna w interpretacji badań medycznych.

Niestety jak wskazują wyniki badań (przeprowadzonych w USA) wielokrotnie lekarze nie zawsze potrafią właściwie oceniać prawdopodobieństwo i umieścić wyniki badań we właściwym kontekście.

Najlepiej objaśni to następujący przykład zamieszczony w książce N. Angier *Kanon*. Załóżmy, że robimy rutynowe badania okresowe i spotykamy tam plakat, który reklamuje test na AIDS z 95% dokładnością. No i cóż, ulegamy reklamie. Po tygodniu otrzymujemy wynik dodatni, a wtedy tragedia, przykrość, strach. Wobec tego przeanalizujemy tę sytuację. Test ma 95% dokładność, zaś wynik jest dodatni. Czy na pewno jest się zarażonym? Wydaje się, że z 95% prawdopodobieństwem – tak.

Nie jest jednak tak źle. Test z jednej strony wykrywa brak odporności u 95% zarażonych osób, które są nosicielami wirusa HIV i daje niewłaściwy wynik u 5% zarażonych.

Z drugiej strony 95% osób, które nie są nosicielami wirusa zostaje zakwalifikowanych poprawnie, a u 5% osób, które nie są zainfekowane, test daje wynik dodatni. I właśnie te 5% jest pocięchą.

Przyjmując, że infekcja wirusem HIV dotyczy mniej więcej jednej na 350 osób, otrzymamy, że w losowej próbie 100 tys. osób zarażonych jest około 285 osób i 99715 osób, które nie są zarażone.

Test potwierdza w naszej próbie, że 271 osób z 285 nosieli jest poprawnie wskazanych oraz że około 4986 osób zdrowych jest z fałszywym wynikiem.

Aby obliczyć prawdopodobieństwo, że rzeczywiście jest się zarażonym, należy podzielić liczbę faktycznie zarażonych osób przez liczbę tych osób, u których wynik był dodatni (tu 4986 zdrowych i 271 zarażonych co daje 5257 osób). Stąd wynosi ono  $271/5257 \approx 0,05$ .

Wynika zatem 95% szansa, że jednak nie jest się nosicielem wirusa HIV.

Oczywiście szacowanie prawdopodobieństwa i odgadywanie właściwych porad w wielu przypadkach nie jest tak łatwe jak w podanym przykładzie. Ale kto wie, czy nie zaszkodziłoby zadawać więcej pytań?

Myślenie ilościowe i analiza probabilistyczna są potężnymi narzędziami, ale nie zapominajmy, że również potrafią kłamać. Powstała nawet na ten temat książka D. Huffa *Jak kłamać za pomocą statystyki?* Łatwo to zrobić postępując się takimi śliskimi terminami jak „statystycznie istotne” (definicja zmienia się w zależności od tego, kto je wygłasza), czy „średnia”.

Średnią oblicza się dodając wszystkie wielkości i dzieląc przez liczbę składników. Jest ona jednak w pewnych przypadkach myląca, tak jak w tym dowcipie o dwóch kolegach. Jeden z nich bije żonę 2 razy w tygodniu, zaś drugi nie jest taki okrutny i nie bije wcale. Stąd każdy z nich bije średnio raz w tygodniu swoją żonę.



Ciekawostką jest fakt, że wiele zjawisk występujących w świecie można ująć i opisać za pomocą krzywej Gaussa (kształt dzwonu) związanej z rozkładem normalnym.

No cóż natura uwielbia wyginać się w gaussowskie łuki. Co więcej wynika stąd prawda o życiu, że dużo łatwiej być kimś przeciętnym (tzn. tkwić w środku krzywej), niż być kimś wybitnym lub skrajnie odstającym od reszty.

Należy również pamiętać, że wiele analiz statystycznych jest prowadzonych na życzenie pewnych firm (np. farmaceutycznych) i może się zdarzyć zatajenie wyników. Trzeba wówczas zapytać skąd się wzięła dana statystyka i czy została potwierdzona przez wiarygodne źródło. Wyniki analizy statystycznej powinny być podane we właściwym kontekście i wydobywać kluczowe informacje o tle.

No i na zakończenie ciekawostka. Francis Galton w 1872 roku posłużył się prawdopodobieństwem w celu oszacowania jakości modlitw za rodzinę królewską oraz długości „średniego” wieku osiąganego przez mężczyzn z różnych klas społecznych. Z przeprowadzonych badań wynika, że władcy są zdecydowanie najkrócej żyjącą grupą spośród wszystkich klas cieszących się dostatnim życiem. Stąd modlitwy w ich intencji (o zdrowie) nie miały żadnej skuteczności.

Podsumowując: w tym coraz bardziej złożonym świecie, pełnym zbiegów okoliczności bez znaczenia, to czego nam w wielu sytuacjach potrzeba, to nie więcej nowych informacji o faktach (zalewają one nas w dostatecznym stopniu), ale lepszego panowania nad tym, co już wiemy. Do tego zaś taki mały kurs rachunku prawdopodobieństwa byłby niezbędny. Mniej byłoby może złych decyzji, niewiarygodnych sondaży, czy takich twierdzeń (w pewnej gazecie), że kara śmierci jest procesem nieodwracalnym.

Krystyna Nowicka

Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość

P.S. Ostatnio przeczytałam („Angora” 03.01.2010), że pewna grupa naukowców w Niemczech ocenia pod koniec każdego roku przepowiednie najślawniejszych jasnowidzów świata. Wynikają stąd całkiem ciekawe wnioski np. najlepiej udają się jasnowidzom przepowiednie pogodowe.