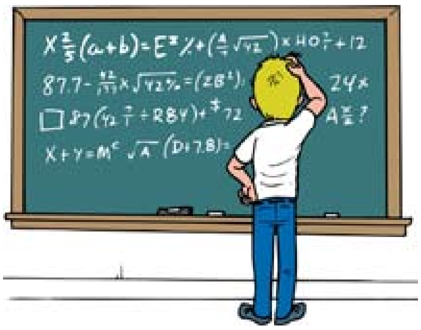
a doświadczenie lub film składają się z tysięcy obrazów. Tak więc zastosowanie środków multimedialnych może zarówno uatrakcyjnić nauczanie, jak i pogłębić zrozumienie praw i zjawisk fizycznych.

Multimedia należy stosować jednak z rozsądkiem i umiarem. Nadmierne stosowanie form wirtualnych w nauczaniu może prowadzić do trudności w odróżnieniu rzeczywistości od jej wirtualnego obrazu oraz zatracenia umiejętności wykonywania pomiarów i interpretacji wyników. Dlatego filmy, symulacje i animacje komputerowe nie powinny zastępować rzeczywistego eksperymentu fizycznego, lecz go uzupełniać i ubogacać. Są one nawet nieodzowne, wtedy gdy służą do ilustracji zjawisk trudnych do wyobrażenia lub niemożliwych do realizacji. Szczególnie dużą wartość dydaktyczną mają profesjonalne filmy uzupełnione dodatkowo o animacje, grafikę, ujęcia w zwolnionym względnie przyśpieszonym czasie oraz zdjęcia stroboskopowe. Równie interesujące są filmy video tych eksperymentów, których nie można zaprezentować podczas wykładu ze względu na czas ich trwania, koszt wykonania oraz bezpieczeństwo.

Eksperymenty pokazowe były, są i powinny pozostać podstawowymi środkami dydaktycznymi służącymi do ilustracji praw przyrody. Przyrządy zaś służące do demonstracji tych eksperymentów zmieniają się i ciągle będą się zmieniać. Dawne unikalne przyrządy demonstracyjne mogą stanowić inspirację dla twórców nowych przyrządów.

Andrzej Kuczkowski
Wydział Fizyki Technicznej
i Matematyki Stosowanej



Kącik matematyczny

Ważne miejsce wśród głównych stałych w matematyce, takich jak π i e, zajmuje złota liczba. Zasługuje ona na wyróżnienie, ponieważ posiada wiele pięknych i bardzo ciekawych własności. Oprócz tego pojawia się zarówno w wielu zagadnieniach matematycznych, jak i w pewnych problemach życia codziennego. Warto więc coś o niej opowiedzieć.

W poszukiwaniu złota, czyli coś o złotej liczbie

„Nauki matematyczne szczególną uwagę zwracają na ład, symetrię i ograniczenie, a są to najwyższe formy piękna."
Arystoteles

„Złota liczba = ϕ *= 1,61803... jest wizytówką matematyki rekreacyjnej, pojawia się w ananasach, spiralach i pochodzącym sprzed 800 lat zadaniu o tempie wzrostu królików."*
I. Stewart „Histerie matematyczne"

„Złoty podział występuje w Wielkiej Piramidzie, w Partenonie, w sławnych obrazach, w gmachu ONZ, w ładnie wyglądających prostokątach, w ciele ludzkim i w „Eneidzie" Wergiliusza."
S. K. Stein „Potęga liczb"

Opowieść o złotej liczbie należy rozpocząć od tzw. złotego podziału odcinka. Polega on na takim podziale odcinka na dwie części, aby ich długości pozostawały względem siebie w pewnej proporcji. Weźmy więc odcinek o długości „a" i zaznaczmy odpowiedni punkt podziału.

Punkt C dzielący odcinek należy umieścić w takim miejscu, aby otrzymać proporcję:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

gdzie:
a – długość odcinka AB
x – długość odcinka AC
a-x – długość odcinka CB

Stosunek długości *a/x* został nazwany złotą liczbą i oznaczony literą φ(fi). Należy zauważyć, że równość

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

może być zapisana również w postaci

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\frac{a}{x} - 1}.$$

Uwzględniając, że $\frac{a}{x} = \varphi$, otrzymujemy równość

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}.$$

Stąd można już obliczyć wartość liczby φ. Traktując równość $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$

jako równanie na niewiadomą φ, możemy przekształcić je do postaci $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Jest to równanie kwadratowe, którego dodatnim rozwiązaniem jest liczba niewymierna

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\,...$$

Złoty podział odcinka pojawia się już dość wcześnie w historii matematyki. Zasada ta była znana w starożytnej Grecji i uznawana za najdoskonalszą pod względem estetycznym, a nawet boską.

Grecy wysoko cenili harmonię i proporcje, dlatego równość określającą złoty podział uważali za proporcję doskonałą. Informacje o złotej proporcji można znaleźć już w „Elementach" Euklidesa (300 r. p.n.e.).

Natomiast pierwszą książkę o własnościach złotej liczby pt. „De divina proportione" („O boskiej proporcji") opublikował w 1509 r. włoski matematyk Luca Pacioli.

Wśród wielu własności tej liczby pewne z nich są łatwe do zauważenia. Z równości $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$ można otrzymać równość $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Oznacza to, że łatwo jest obliczyć odwrotność tej liczby. Wystarczy usunąć jedynkę przed przecinkiem z jej rozwinięcia ($\frac{1}{\varphi} = 0{,}61803\,...$).

Natomiast równanie $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ może być zapisane w postaci $\varphi^2 = \varphi + 1$, co oznacza, że łatwo jest obliczyć kwadrat złotej liczby. Wystarczy w rozwinięciu napisać w miejscu 1 liczbę 2 tj. $\varphi^2 = 2{,}618033...$

Jak się okazało, jest to jedyna liczba dodatnia mająca takie własności.

Inną ciekawą własnością jest zapis złotej liczby w postaci tzw. ułamka łańcuchowego. Ma ona postać:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}$$

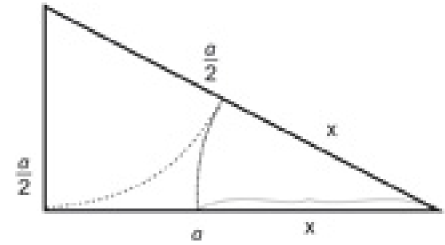
Jak jednak zaznaczyć na rysunku punkt złotego podziału danego odcinka? Załóżmy, że dany jest odcinek o długości a. Należy zaznaczyć na nim odcinek o długości x taki, że

$\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, co daje nam $x = \frac{2a}{1+\sqrt{5}}$ i proste przekształcenie określa długość x jako $x = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{a}{2}$.

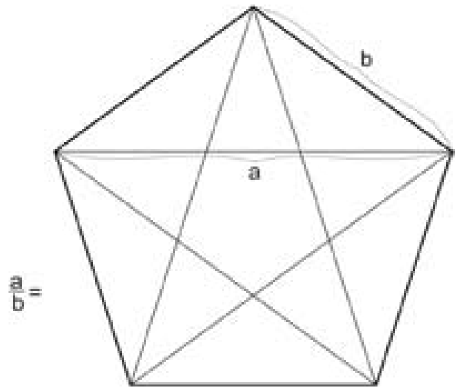
Wystarczy teraz zbudować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, $a/2$. Wówczas przeciwprostokątna (zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa) ma długość

$$\frac{1}{2}a\sqrt{5}.$$

Należy na przeciwprostokątnej odjąć odcinek o długości $a/2$, a to, co zostanie, ma długość x. Następnie z odpowiedniego wierzchołka trójkąta zakreślamy cyrklem odcinek x i otrzymany podział określa złotą proporcję.



Złota liczba występuje w konstruowaniu różnych figur. Jedną z nich jest pentagram – pięciokąt gwiaździsty foremny. Był on mistycznym symbolem kultu pitagorejskiego. Jest to figura utworzona z przekątnych pięciokąta foremnego.



Pięciąkąt foremny
- wszystkie boki są równe
- wszystkie kąty są równe
- wszystkie przekątne są równe
- każda przekątna jest równoległa do jednego boku

Stosunek długości przekątnej do długości boku pięciokąta foremnego jest złoty.

Z powyższego faktu wynika, też że w dziesięciokącie foremnym stosunek promienia okręgu opisanego do długości boku jest liczbą złotą.

Innymi figurami zawierającymi tę liczbę są: złoty trójkąt, złoty romb czy złoty prostokąt. Jest to prostokąt, w którym stosunek dłuższego boku do krótszego wyraża się złotą liczbą. Cieszył się on szczególnymi względami wśród artystów czy architektów.

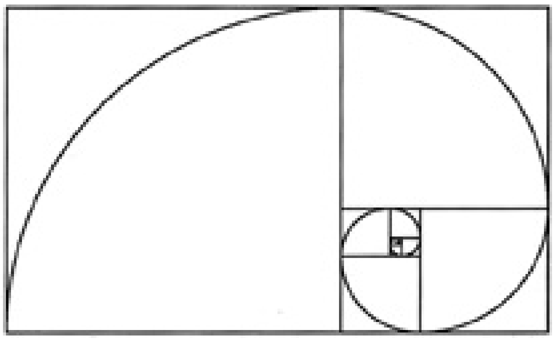
Prostokąty są wszędzie wokół nas – budynki, okna, drzwi, książki, itp. I dlatego złoty prostokąt potraktowano jako klucz do projektowania pięknych przedmiotów.

Złote prostokąty mają też pewne ciekawe własności, a wśród nich następującą:

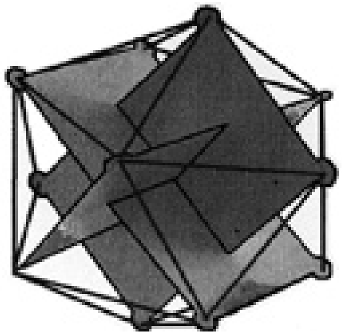
jeżeli odciąć od niego kwadrat, to prostokąt, jaki pozostanie, jest również złotym prostokątem. Operację tą można powtarzać wielokrotnie, otrzymując za każdym razem coraz mniejsze złote prostokąty. Położenia kolejnych złotych prostokątów jakby obracają się.

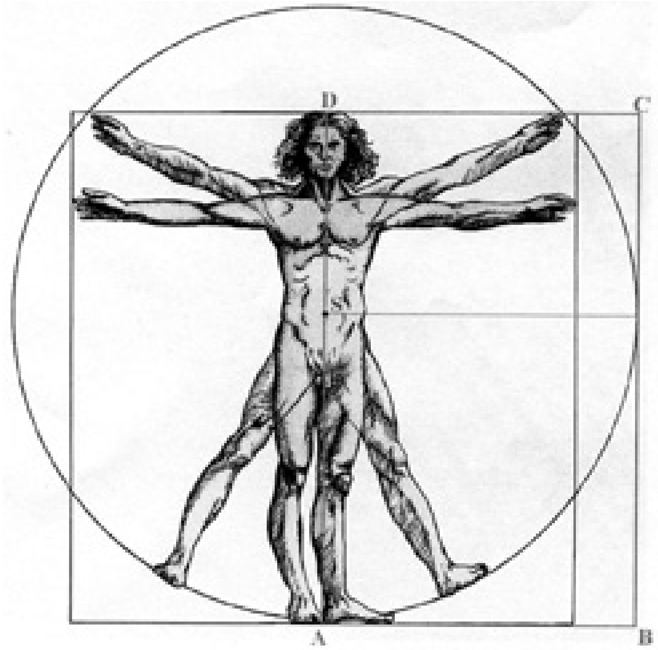
Okazuje się także , że pewien związek z obracającymi się złotymi prostokątami ma krzywa zwana spiralą logarytmiczną. A przecież kształt jej mają liczne twory natury, np. niektóre muszle.

Wierzchołki trzech wzajemnie prostopadłych złotych prostokątów o wspólnym środku tworzą wierzchołki dwudziestościanu foremnego. Natomiast złote romby (stosunek przekątnych jest liczbą złotą) stanowią ściany trzydziestościanu foremnego.



Spirala
- kolejne punkty wyznaczające złoty podział leżą na **spirali równokątnej**





Schemat człowieka oparty o złotą proporcję według Leonardo da Vinci

Jakby tego było za mało, liczba ϕ ma ścisły związek ze słynnym ciągiem liczbowym, a mianowicie ciągiem Fibonacciego. Jest to ciąg rekurencyjny określony następująco: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in N$. Oznacza to, że każdą liczbę w tym ciągu otrzymuje się, dodając dwie poprzedzające ją liczby. Twórcą był Leonardo Fibonacci – podróżnik i kupiec z Pizy. Autor kompendium wiedzy matematycznej „Liber abaci" (1202). To tam pojawiło się zadanie o tempie wzrostu królików, którego rozwiązanie było określone przez podany ciąg.

Związek liczb Fibonacciego z liczbą złotą, choć zadziwiający, nie jest przypadkowy. Już J. Keppler odkrył, że stosunki kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego dążą do liczby złotej. Równie wybitny matematyk Daniel Bernoulli badał związek liczb Fibonacciego ze złotym stosunkiem. Ciąg Fibonacciego ma liczne realizacje w zjawiskach przyrody (ilość płatków wielu kwiatów, łuski ananasa, spirale w słoneczniku). Stąd można powiedzieć, że liczba złota istnieje także w przyrodzie.

Złotemu stosunkowi przypisuje się także wartość estetyczną.

Powstało wiele publikacji twierdzących, że liczba złota jest kluczem do projektowania pięknych przedmiotów. Już starożytni Grecy stosowali złoty stosunek do budowy Partenonu w Atenach. Również w Renesansie często stosowano te proporcję. Historycy sztuki odnaleźli ją nawet w „Mona Lizie" Leonarda da Vinci, a także w jego rysunkach proporcji ludzkich.

W XX wieku architekt Le Corbusier czy rzeźbiarz A. St. Gorge byli gorącymi orędownikami złotego podziału i wykorzystywali go w swojej twórczości. Krótko mówiąc, boska proporcja fascynowała wielu artystów i architektów różnych epok.

Okazało się także, że można ją znaleźć również w muzyce (V symfonia Beethovena, czy sonaty Mozarta).

Ciekawostką jest też fakt, że w 1876 roku napisano książkę o doświadczeniach psychologicznych zmierzających do ustalenia najbardziej estetycznego kształtu prostokąta, tzw. złotego prostokąta.

W obecnych czasach podchodzi się jednak do tych spraw z większym dystansem.

Niemniej zagadnienie, jakie pojawia się przy tej okazji, stanowi element estetyczny w matematyce. Zazwyczaj matematykę traktuje się jako dziedzinę „suchą" i mało estetyczną, a przecież w matematyce oceny estetyczne istnieją i są ważne. Mogą być rozwijane i przekazywane z pokolenia na pokolenie. Przykładem jest tu właśnie chociażby estetyczna wartość złotego stosunku.

Krystyna Nowicka
C.N.M.

P.S. Kuzynką złotej liczby jest tzw. „liczba plastikowa" p = 1,324178... Jej historia jest znacznie krótsza, ale również intrygująca.