

Berendt G., *Żydzi na terenie Wolnego Miasta Gdańska w latach 1920–1945 (działalność kulturalna, polityczna i socjalna)*, Gdańsk 1995.

Fedusio P., *Ukraińcy w Wolnym Mieście Gdańsku (1920–1939). Działalność organizacji ukraińskich na terenie Wolnego Miasta Gdańska* [w:] *Między Odrą a Dnieprem. Wyznania i narody*, pod red. T. Stegnera, Gdańsk 1997, s. 135–162.

Fedusio P., *Ukraińscy studenci w Wolnym Mieście Gdańsku w latach 1920–1939* [w:] *Między Odrą a Dnieprem. Wyznania i narody. część II*, pod red. T. Stegnera, Gdańsk 2000, s. 232–249.

Heppner W., *Estońska korporacja akademicka Deüs Wäinla przy politechnice Wolnego Miasta Gdańska (1924–1939)*, „Pismo PG” 1997, nr 9, s. 36–40.

Heppner W., *Gdańskie Koło Międzykorporacyjne, część I*, „Pismo PG” 1997, nr 3, s. 22–26.

Heppner W., *Gdańskie Koło Międzykorporacyjne, część II*, „Pismo PG” 1997, nr 4, s. 20–23.

Heppner W., *Polskie środowisko korporacyjne na Politechnice w Gdańsku (1921–1939)*, „Pismo PG” 1995, nr 6, s. 17–18.

Heppner W., *Korporacja akademicka K! Polski Związek Akademicki Gedania – Gdańsk*, „Pismo PG” 1996, nr 2–3, s. 59–63.

Heppner W., *Na 70-lecie Polskiej Korporacji Akademickiej K! Rosevia (Gdańsk)*, „Pismo PG” 1995, nr 9, s. 22–26.

Heppner W., *Polska Korporacja Akademicka „Związek Akademików Gdańskich Wisła”. część I*, „Pismo PG” 1996, nr 6, s. 36–40.

Heppner W., *Polska Korporacja Akademicka „Związek Akademików Gdańskich Wisła”. część II*, „Pismo PG” 1996, nr 7, s. 19–23.

Heppner W., *Polska Korporacja Akademicka „Związek Akademików Gdańskich Wisła”. część III*, „Pismo PG” 1996, nr 8, s. 22–25.

Heppner W., *Polska Korporacja Akademicka „Związek Akademików Gdańskich Wisła”. część IV*, „Pismo PG” 1996, nr 9, s. 24–28.

Heppner W., *Polska Korporacja Akademicka „Związek Akademików Gdańskich Wisła”. część V*, „Pismo PG” 1997, nr 1, s. 27–31.

Heppner W., *Zarys historii korporacji akademickiej K! Helania (Gdańsk)*, „Pismo PG” 1996, nr 1, s. 27–31.

Heppner W., *Związek Filistrów Gdańskiej Korporacji „ZAG Wisła”*, „Pismo PG” 1997, nr 2, s. 13–16.

Fudziński K., *Korporacja akademicka Wi-*

*śła wczoraj i dziś*, „Pismo PG” 2011, nr 3, s. 24–28.

Mikos S., *Polacy na politechnice w Gdańsku w latach 1904–1939*, Warszawa 1987.

Pater D., Tomaszewski P., *Od morza jesteśmy... Świadomość pomorska w myśli i działalności akademickiego ruchu korporacyjnego w Polsce w latach II Rzeczypospolitej*, Toruń 2006.

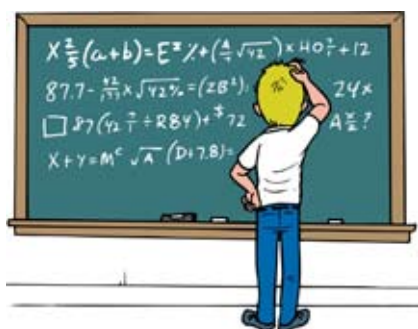
Polak H., *Młodzież polska na Politechnice Gdańskiej w latach 1920–1939*, „Gdańskie Zeszyty Humanistyczne. Prace Pomorzoznawcze” 1965, nr 13, s. 91–120.

Tomaszewski P., *Polskie korporacje akademickie w latach 1918–1939. Struktury, myśl polityczna, działalność*, Toruń 2011.

Wieloch R., *Polska społeczność akademicka w Gdańsku w latach 1904–1939*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej. Budownictwo Lądowe”, 1987, z. 42, s. 239–253.

Wiszka E., *„Dancigerzy” – działalność ukraińskich organizacji studenckich na Politechnice Gdańskiej w latach 1922–1933*, „Rocznik Gdański” 2000, t. LX, z. 1, s. 63–70.

Włodarski J., *Politechnika w Gdańsku w latach 1904–1945* [w:] *Zarys dziejów politechniki w Gdańsku 1904–2004*, Gdańsk 2004, s. 11–42.



## Kącik matematyczny



Na prośbę moich znajomych i przyjaciół, którzy nie mogli być na moim wykładzie o matematyce w muzyce, postanowiłam przedstawić w Kąciku pewną jego skróconą wersję.

## Matematyka w muzyce czy muzyka w matematyce?

„Muzyka to nieświadome liczenie dusz.”

G. W. Leibniz (jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego)

„Między duchem a materią pośredniczy matematyka.”

H. Steinhaus (wybitny matematyk polski ze szkoły lwowskiej)

Ilość prac opisujących rolę matematyki w muzyce jest ogromna. W związku z tym nie jest możliwe przedstawienie pełnego przeglądu tej tematyki. Stąd i ja ograniczę się tylko do podania pewnych faktów.

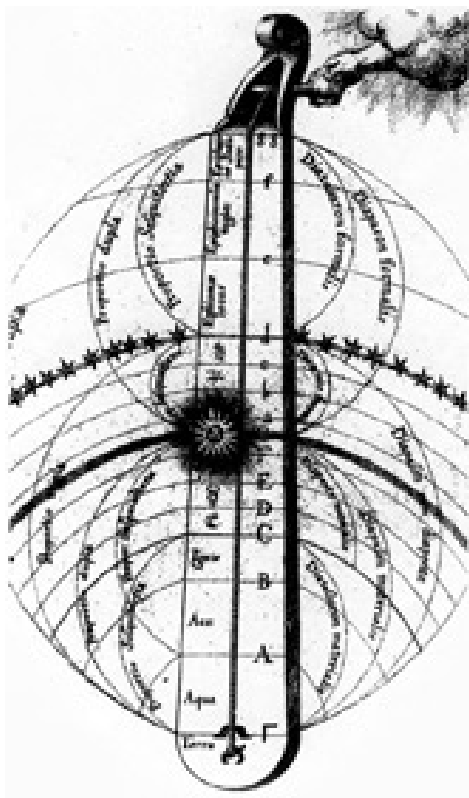
Na wstępie opowiem troszkę o rozważanej materii, tj. o muzyce i matematyce.

Muzyka to spora część naszego życia. Właściwie spotykamy się z nią każdego dnia. Jest ona nam potrzebna od początku

naszego istnienia aż po kres życia. Można też stwierdzić, że w żadnej epoce historii ludzkości nie brakowało muzyki. Wiadomo również, że łagodzi ona obyczaje i odgrywa ogromną rolę terapeutyczną. Ostatnie badania mózgu potwierdzają, że odpowiednia muzyka może obniżyć ciśnienie krwi, poziom cholesterolu czy leczyć depresję. Ale uwaga! Niektóre utwory mogą wywołać skutek odwrotny. Znane są przypadki, kiedy muzyka wywoływała agresję czy inne negatywne sposoby zachowań.

No, a cóż można powiedzieć o matematyce?

Dla przeciętnego odbiorcy muzyki matematyka i muzyka należą do dwóch różnych światów. Matematyka postrzegana jest jako wiedza ścisła i surowa, wymagająca porządku, odpowiednich reguł, daleka od spontanicznej fantazji. Jest to nauka rozumu, a nie serca. Natomiast muzyka to rodzaj sztuki odno-



*Mistyczny monochord*

szącej się bezpośrednio do emocji i wydaje się być wolna od wszelkich reguł. Wszak wypływa ona z serca artysty i twórcy i płynie prosto do serca słuchacza i odbiorcy. Ta zaś wymaga tylko wrażliwości w odbiorze tych emocji.

A czy tak jest naprawdę?

Ci, którzy uczą się muzyki, wiedzą, że opiera się ona na stałych regułach i zależnościach. Budując akordy, skale muzyczne, należy trzymać się pewnych zasad, w których tkwi właśnie matematyka. Również w dźwiękach, z których tworzona jest muzyka, można doszukać się porządku matematycznego. Dotyczy to częstotliwości poszczególnych dźwięków w stroju równomiernie temperowanym, ich wzajemnych stosunków w ramach akordów dur-moll. Także w układzie wartości nut widać proste, arytmetyczne proporcje. Przeglądając zaś książki harmonii funkcyjnej, można spotkać ciągi geometryczne i arytmetyczne, czy wiele innych pojęć matematycznych.

Oprócz tego, gdy mamy do czynienia z utworem muzycznym, to o jego jakości decyduje uporządkowanie w nim dźwięków według odpowiednich zasad i reguł. Czynności układania tworzywa dźwiękowego, w wyniku czego powstaje zamknięta forma muzyczna, to nic innego jak komponowanie. Dlatego też kompozytorzy od wieków stosowali reguły mające charakter matematyczny. Natomiast współcześni kompozytorzy używają dość często metod matematycznych pochodzących z różnych działów matematyki, takich jak teoria gier, teoria prawdopodobieństwa (tu w szczególności kombinatoryka) czy teoria grup.

Pomijając wszystkie te uwagi, należy stwierdzić: muzyki warto słuchać, może nie zastanawiając się, jakie są proporcje między słyszczanymi dźwiękami. Natomiast znajomość struktury dzieła nie musi przeszkadzać w doznaniach estetycznych,

przeciwnie, może ją wzbogacić o czysto intelektualną radość matematyczną.

A teraz trochę o historii matematyki w muzyce.

Można stwierdzić, że matematyczność muzyki zaistniała już dość dawno, bo ponad 2600 lat temu. Odkryli ją pitagorejczycy. Ponieważ podstawą ich filozofii było: „Wszystko jest liczbą”, to idea matematyczności świata dotyczyła wszystkiego, poczynając od nauki, sztuki, a kończąc na całym Wszechświecie.

Pitagorejczycy tworzyli szkołę, której mistrzem był oczywiście Pitagoras. Był on znany w starożytnej Grecji nie, jakby nam obecnie się wydawało, z twierdzenia Pitagorasa dotyczącego trójkąta prostokątnego, a z odkrycia skali muzycznej.

Jak głosi legenda, pewnego dnia Pitagoras bawił się monochordem, tj. instrumentem złożonym z pudełka i przeciągniętej po nim struny. Przesuwając ruchomy mostek w górę i w dół monochordu, zmieniał wysokość dźwięku. Odkrył wówczas, że zachowanie struny jest osobliwe, ale przewidywalne. Gdy trącił strunę bez mostka otrzymał czysty dźwięk, zaś gdy umieścił mostek dokładnie pośrodku instrumentu, stwierdził, że każda z części wytwarza taki sam dźwięk, ale dwa razy wyższy niż podstawowy. Niewielkie przesunięcie mostka, które na przykład dzieli strunę w stosunku 3/5 do 2/5 struny i trącenie obu części wytwarza dwa tony, które są oddalone o interwał zwany w muzyce kwintą (stosunek 3:2) – interwał uważany za najbardziej poruszający i twórczy. Podział struny w innych proporcjach pozwala uzyskać rozmaite kombinacje tonów, które są albo przyjemne, albo nieprzyjemne dla ucha. Co ciekawe, kiedy Pitagoras umieścił mostek w punkcie, który nie dzielił struny według prostego stosunku, to tony nie pasowały do siebie i zwykle powstawał dysonans. Dla Pitagorasa gra na instrumencie była czynnością matematyczną. Harmonia monochordu była również harmonią matematyki oraz harmonią Wszechświata.

Pitagorejczycy podzielili całą skalę muzyczną na równomierne oktawy. Oktawa pitagorejska dzieliła się na 7 tonów i 12 półtonów. Krótko mówiąc, Pitagorejczycy traktowali muzykę jako rodzaj organizacji dźwięków, prowadząc obliczenia na części struny.

O łączeniu matematyki z muzyką wypowiadał się również Euklides, Platon, a także Arystoteles.

Wraz z upływem czasu podejmowano i wciąż podejmuje się poprawianie skali muzycznej. Szczególny kłopot ze skalą pitagorejską wystąpił, gdy pojawiły się instrumenty o tzw. „stałym stroju”, tj. organy, klawikordy, a później fortepiany. Początkowo strojono je tak, że można było grać tylko w niektórych tonacjach. Wkrótce jednak powstał nowy sposób strojenia instrumentów klawiszowych, tzw. „dobre temperowanie”. Strój równomiernie temperowany polega, mówiąc z grubsza, na tym, że różnica wysokości między wyższym a niższym dźwiękiem półtonu jest taka sama dla wszystkich półtonów. Skoro 12 półtonów składa się na oktawę, czyli częstotliwość wynikowa jest dwa razy większa od wyjściowej mamy, że iloraz częstotliwości wyższego i niższego dźwięku z dowolnego półtonu jest równy  $\sqrt[12]{2}$ .

Skala temperowana została rozslawiona przez J. S. Bacha na początku XVIII wieku. Był tak zachwycony tym systemem, że od razu napisał słynne dzieło na instrument klawiszowy, składające się z 24 preludium i 24 fug, wykorzystując wszystkie tonacje.

Trzeba jednak stwierdzić, że uroda muzyki opiera się ciągle na kompromisach między czystym dźwiękiem z jednej strony, a możliwością dowolnej tonacji z drugiej strony.

Zasada harmonii przestała dominować w muzyce współczesnej. Od lat 20. XX wieku, kompozytorzy zaczęli odchodzić od systemu tonalnego dur-moll i od reguł faworyzujących konsonanse. Wraz z odrzuceniem tradycyjnych zasad harmonii zwrócono się w procesie komponowania do matematyki. Przykładem są tu założenia dodekafonii (1920 – 1950) i twórczość francuskiego kompozytora Xenakisa (1922 r.). Xenakis w swej twórczości czerpie modele z rachunku prawdopodobieństwa, teorii gier, teorii zbiorów, czy teorii grup. Jego muzyka to symbioza matematyki i muzyki (no cóż, nie zawsze przyjemnej dla ucha).

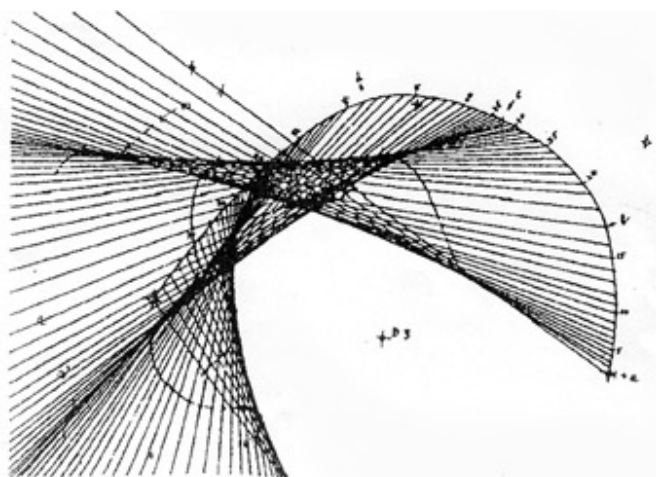
Obecnie wiele czasopism z historii muzyki upodabnia się do prac z zakresu matematyki.

Niezwykła i ważna rola matematyki w muzyce pojawia się, gdy chcemy zrozumieć, co to jest dźwięk i jakie są jego właściwości. Wszak muzyka to zbiór odpowiednio uporządkowanych dźwięków. Dźwięk powstaje w wyniku drgań mechanicznych i określa się go jako falę ciśnienia powietrza. Powietrze w danym punkcie rozrzedza się i spręża i właśnie te zmiany ciśnienia są rejestrowane przez nasze ucho. Wobec tego, można krótko stwierdzić, że fizyka + matematyka = muzyka.

Chcąc jednak zrozumieć dane zjawisko, trzeba je opisać, czyli stworzyć pewien model matematyczny. Tak samo było z próbami zrozumienia powstawania dźwięków w instrumentach muzycznych. Można stwierdzić, że zaczęło się od opisu drgań struny umocowanej na końcach. Zagadnienie to pojawiło się w XVIII wieku i w jego opisie, jak i w analizie wzięło udział wielu wybitnych matematyków.

W 1748 r. szwajcarski matematyk L. Euler podał równanie drgań struny, zwane obecnie też równaniem fali płaskiej. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego wraz z pewnymi warunkami granicznymi. Analiza rozwiązania tego zagadnienia potwierdziła określenie wprowadzonych wcześniej interwałów w muzyce, jak i istnienie konsonansów czy dysonansów. Nie będę przedstawiała tej analizy, ale chcę jednak podkreślić, że wiedza z trygonometrii jest tu niezbędna.

No cóż, muzyki dostają instrukcję obsługi tworzenia muzyki, zaś fizyka i matematyka mówi, jak to jest zrobione. Stru-



Zapis utowu muzycznego przez Xenakisa

na skrzypiec jest prostym obiektem jednowymiarowym, ale obiekty wytwarzające dźwięki mogą mieć większe wymiary, np. bęben.

Odkrycia jednak, jak wiadomo, zaczynają się od prostego i stwarzają możliwości układom złożonym.

Równanie falowe (zapoczątkowane w opisie drgań struny) w tej lub bardziej złożonej postaci zaczęło pojawiać się poza muzyką, a mianowicie w dynamice cieczy, gdy opisywało powstawanie fal wodnych, w ogólnej teorii dźwięków, gdy opisywało fale akustyczne, w teorii elektryczności i magnetyzmu, gdzie mówi się o falach elektromagnetycznych.

Natomiast najmniej zbadane są fale mózgowo, wiadomo tylko, że w całych grupach neuronów dochodzi do rytmicznych zmian aktywności elektrycznej, w wyniku której powstają fale mózgowo. Być może wiedza na ten temat objaśniłaby nam odbiór przez nas muzyki. Należy jeszcze podkreślić, że wykształcenie matematyczne często idzie w parze z zainteresowaniem się muzyką. Wielu matematyków posiada wykształcenie muzyczne. Jedni pozostali przy matematyce, ale są i tacy, którzy zdecydowali się na karierę muzyczną. Wśród najbardziej znanych matematyków polskich, wybitnym kompozytorem i dyrygentem był niezjący już Witold Lutosławski (1913 – 1994).

Natomiast twórcą muzyki lekkiej pracującym w matematyce jest Thomas Lehrer (1928) – absolwent matematyki Uniwersytetu Harvarda. Brytyjski historyk muzyczny M. Gilbert zaliczył Lehrera do 10 największych osobowości ostatniego stulecia. Piosenki jego mają w większości treść matematyczną i są bardzo rytmiczne.

T. Lehrer dzielił swoje życie zawodowe między nauczanie matematyki, a twórczość muzyczną. O jego piosenkach pisał wybitny matematyk polski Hugo Steinhaus i bardzo je chwalił.

Obecnie piosenki Lehrera można znaleźć w Internecie i są one inspiracją twórczą dla wielu osób.

Należy jeszcze wspomnieć o pierwszym w historii muzyki utworze operowym o tematyce matematycznej. W 2006 roku operę pt. „Cantor – mierzenie nieskończoności” napisał niemiecki kompozytor Grünauer. Powstała ona na zamówienie władz niemieckiego miasta Halle. Cantor (1845 – 1918) był wybitnym matematykiem, twórcą teorii zbiorów, który część swojego życia zawodowego spędził właśnie w tym mieście.

Na pomniku poświęconym profesorom uniwersytetu w Halle jest również portret Cantora oraz jego aforyzm „Istota matematyki tkwi w jej wolności”.

Całkowicie na zakończenie, urok matematyki jest często ukryty za skomplikowanymi wzorami, tajemniczymi formułami i oznaczeniami. Słuch na nie posiadają tylko nieliczni.

Ale kto wie, gdyby tym innym dostarczył odpowiedni matematyczny aparat słuchowy, to być może więcej osób usłyszałoby niezwykle piękno matematyki.

I w tym sensie matematyka jest również pokrewna duchowo muzyce.

Krystyna Nowicka

Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość

P.S. *Matematyka jest uniwersalna, nie ma rzeczy, która by była jej obca*

(H. Steinhaus)