



Dość często spotykam się ze stwierdzeniem, że dany problem matematyczny to „taka czysta abstrakcja”. Szczególnie gdy jest on trudny do zrozumienia i wymaga pewnego wysiłku intelektualnego oraz wiedzy. Powstaje pytanie: w jakim stopniu matematyka jest wiedzą abstrakcyjną? Temat ten zaczął mnie coraz częściej nurtować. Tym bardziej, że mamy obecnie dwa światy, realny i wirtualny w Internecie. Jak przekazywać pewne pojęcia matematyczne, skoro obecne „pokolenie internetowe” oczekuje obrazków i wiedzy „esemesowej”?

Matematyka – to taka abstrakcja (refleksje o nauczaniu matematyki)

W jakim stopniu matematyka jest wiedzą abstrakcyjną?

Krzysztof Nowicka
Centrum Nauczania
Matemat. i Kształcenia
na Odległość

„Matematyka jest sztuką nadawania tych samych nazw różnym rzeczom.”
Henri Poincaré

„Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty, matematyk wybitny – analogie między faktami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami.”
Stefan Banach

„Każdy człowiek ma określony horyzont. Gdy ten się zwęża i staje się nieskończenie mały, ogranicza się do punktu. Wówczas człowiek powiada: to jest mój punkt widzenia.”
Dawid Hilbert

Słowo „abstrakcja” w mowie potocznej oznacza coś oderwanego od rzeczywistości, zaś łacińskie *abstraho* znaczy odrywać, rozdzielać.

W tym znaczeniu można stwierdzić, że proces abstrahowania przenika całą matematykę. Stał się on operacją wspomagającą poznania wielu pojęć. Wymaga to jednak pewnego wysiłku intelektualnego, bowiem abstrakcyjne często bywa trudne. Co więcej, powstaje pytanie, czy warto się z tym zmagać, szczególnie, gdy nie bardzo wiadomo, jaki jest ten cel.

Jesteśmy istotami mającymi różne potrzeby. Wytworzyło to nawyk pytania o użytek, poszukiwania tego co użyteczne i praktyczne. Jesteśmy też istotami, które poznają przez zmysły, tymczasem tworzy matematyczne są niezmysłowe.

Stwarza to wiele problemów w nauczaniu matematyki, już nawet na etapie matematyki elementarnej. Nie każdy potrafi przyswoić sobie szybko działania arytmetyczne. Ważny jest dobór przykładów wyjaśniających dany problem.

Tu może anegdota o nauczycielu, który próbował nauczyć pastuszka odejmowania

– Ile jest pięć minus dwa? Wyobraź sobie – pomaga nauczyciel – że pasiesz pięć kóz i dwie ci się zgubiły. Ile przyprowadzisz do domu?

– No cóż, dostanę w skórę od ojca – martwi się pastuszek.

Nauczyciel próbuje jeszcze raz.

– Masz pięć monet, dwie dałeś bratu. Ile ci zostało?

– Nigdy nie dałbym bratu dwóch monet, gdybym miał ich pięć – odpowiada malec.

Niestety nie udało się nauczyć pastuszka odejmowania. Ważne są bowiem w nauczaniu przykłady dostosowane do poziomu ucznia, jak i jego mentalności. Co więcej, ważną rolę odgrywają również emocje. Łatwiej przyswajamy wiedzę, mając pełną motywację i potrzebę.

Jak się okazuje, już działania arytmetyczne i ich własności przegrywają z kalkulatorem czy komputerem. Stworzyło to całkiem nowe problemy. Trudniej jest bowiem wyjaśnić własności działań w innych strukturach algebraicznych niż liczbowe.

Przykładem niech będzie prawo przemienności dodawania liczb, którego obecnie prawie się nie używa. Chcąc obliczyć przy pomocy kalkula-

tora np. $121 + 18 + 29 + 32$, nie zwraca się uwagi na sposób obliczeń, tj. dodaje się kolejno te liczby. Natomiast, jeżeli używamy kartki papieru i myślenia, można zauważyć, że $121 + 18 + 29 + 32 = (121+29) + (18+32) = 150 + 50 = 200$. Tu właśnie zostały wykorzystane prawa dodawania – łączności i przemienności. Powtarzają się one w innych strukturach algebraicznych.

Dlatego, ucząc dawniej tych własności, można było odwołać się do wiedzy liczbowej i nie były one tak abstrakcyjne jak obecnie.

Trzeba jednak stwierdzić, że na pewnym etapie edukacji matematycznej, to co na początku jest abstrakcyjną nowością, staje się po pewnym czasie zwyczajne.

Na przykład pojęcie pochodnej funkcji, początkowo trudne dla wielu studentów, po pewnym czasie staje się zwyczajnością, którą się sprawnie manipuluje.

W momencie zaś, kiedy poznają oni równania różniczkowe i ich zastosowania wzrasta poczucie realizmu i potwierdzenie użyteczności. Uzyskane przez abstrakcję pojęcie staje się rzeczywistym podmiotem poznania.

Ciekawa jest też historia geometrii. Geometria Euklidesa w swojej czystej postaci jest geometrią cyrkla i linijki. Abstrahuje się od opisu ilościowego. Nieco później pojawiają się kategorie ilości. Umacniają się one dopiero w geometrii analitycznej. Operacje liczbami stają się tym czymś zasadniczym.

Jednak obecnie powracamy do wersji obrazkowej, bo szybciej dociera ona do uczących się matematyki i nie trzeba powtarzać „wyobraźcie sobie”.

Oczywiście wykonują to różne programy komputerowe, np. Geo-Gebra. Co więcej, chcąc poznać np. spiralę logarytmiczną czy lemniskatę Bernoulliego, nie trzeba analizować ich równań. Wystarczy tylko nacisnąć kilka klawiszy, a na monitorze komputera pojawi się ta linia.

Niestety, będąc tylko odbiorcami, tracimy wiele umiejętności związanych tak z myśleniem, jak i z wyobraźnią. Praktycznie nie trzeba zadawać żadnych pytań typu: „Skąd to?”, „Dlaczego tak?”

„Co by było gdyby?”. Nie ma etapów pośrednich rozważań – jest gotowy wynik. Natomiast wiadomo, że stanowią one źródło wielu nowych pojęć w matematyce, a przecież mogą być użytecznym narzędziem w przyszłości.

Przeszkodą w twórczości czy poznaniu matematycznym jest czas, a właściwie jego brak. Bardzo często wprowadza to zamieszanie i brak zrozumienia.

Niestety treści programowe nauczania matematyki na studiach nie uwzględniają tego. Nie ma czasu na powtórki. Czasami jest to bieg na przelaj i na skróty.

Dla mnie matematyka jest cudowną strawą, którą trzeba się delektować, a nie łapczywie pożerać, zadławić się, nie mając pojęcia, co się zjadło.

No cóż, potrzebny jest też we wszystkim umiar, tak w jakości, jak i w ilości abstrakcji.

Na zakończenie mała opowiadka, jak nadmiar precyzji zabija treść: Nauczycielka pyta dzieci, pokazując rysunek kotka

– Dzieci, co to jest?

– Kotek! – odpowiadają dzieci ochoczo.

– Nie dzieci, to jest rysunek kotka – poprawia nauczycielka.

Następnie pokazuje rysunek myszki i ponownie pyta:

– Dzieci, co to jest?

– Myszka!

– Nie dzieci, to jest rysunek myszki.

W końcu pokazuje rysunek, na którym kotek zjada myszkę i pyta

– Dzieci, co to jest?

– To jest rysunek kotka, który zjada rysunek myszki – pada odpowiedź.

Dlatego też my, nauczający matematykę mamy czasami trudne zadanie, dbając o precyzję wypowiedzi i jednocześnie pilnując, aby te „rysunki” nas nie zjadły.

P.S. *Jest jedna forma wyrażania sympatii nauczycielowi – uczenie się.*

Jan Kurczab – dramaturg

