

OD SZKOLNIKA DO ŻAKA

klasy 5 i 6 szkoły podstawowej

rok szkolny 2020/2021

Rozwiązania zadań – etap III

Zadanie 1. Suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest równa 1500. Ile wynosi największa z tych liczb?

Rozwiązanie:

Niech n będzie największą z pięciu kolejnych liczb naturalnych.

Pozostałe liczby to:

$$n - 1, n - 2, n - 3 \text{ i } n - 4$$

Z warunków zadania mamy:

$$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n = 1500$$

$$5n - 10 = 1500$$

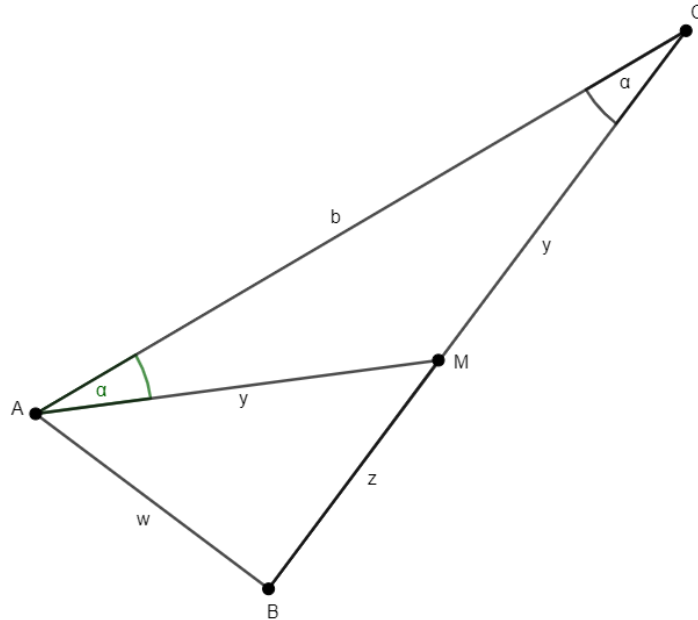
$$5n = 1510 \quad |:5$$

$$n = 302$$

Odpowiedź: Największa z tych liczb wynosi 302.

Zadanie 2. Wiadomo, że trójkąt ABC ma obwód 37 cm. Na boku BC wyznaczono punkt M taki, że kąty CAM i ACM mają równe miary. Wiadomo też, że trójkąt ABM ma obwód równy 24 cm. Oblicz długość boku AC.

Rozwiązanie:



Skoro kąty CAM i ACM mają równe miary, to trójkąt ACM jest równoramienny.

Oznaczmy: $|AM| = |CM| = y$, $|AC| = b$, $|AB| = w$, $|BM| = z$.

Z warunków zadania wiemy, że: $Obw_{\triangle ABC} = 37$ oraz $Obw_{\triangle ABM} = 24$

mamy:

$$\begin{cases} b + w + (z + y) = 37 \\ w + z + y = 24 \end{cases}$$

⇓ z łączności dodawania

$$\begin{cases} w + z + y = 24 \\ b + \underbrace{(w + z + y)}_{=24} = 37 \end{cases}$$

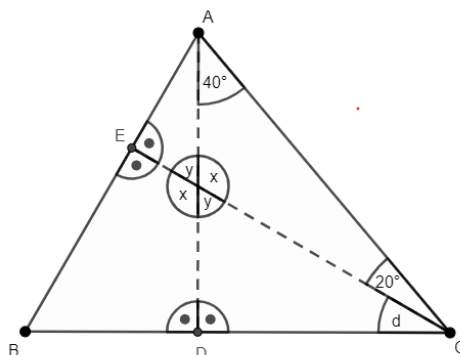
⇓

$$b + 24 = 37$$

$$b = 13 \text{ cm}$$

Zadanie 3. W trójkącie ostrokątnym ABC zaznaczono kąty między bokiem AC tego trójkąta a wysokościami wyprowadzonymi z wierzchołków A i C. Kąty te mają odpowiednio miary 20° i 40° . Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

Rozwiązanie:



Niech M będzie punktem przecięcia się wysokości AD z CE.

Z $\triangle ACM$ mamy: $x + 40^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$

Wtedy: $y + x = 180^\circ$

$$y + 120^\circ = 180^\circ$$

$$y = 60^\circ$$

Następnie z $\triangle AEM$ mamy: $w + 90^\circ + y = 180^\circ$

$$w + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$w = 30^\circ$$

Stąd: $\sphericalangle BAC = w + 40^\circ = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$

Z czworokąta $BDME$ mamy: $\sphericalangle ABC + 90^\circ + x + 90^\circ = 360^\circ$

$$\sphericalangle ABC + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\sphericalangle ABC = 60^\circ$$

Mamy z $\triangle CDM$ $y + 90^\circ + d = 180^\circ$

$$60^\circ + 90^\circ + d = 180^\circ \Rightarrow d = 30^\circ$$

Wtedy: $\sphericalangle BCA = d + 20^\circ = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$

Odpowiedź: Miary kątów trójkąta ABC wynoszą 70° , 60° i 50° .

Zadanie 4. Porównaj liczby: $a = \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \dots \cdot \frac{99}{2} \cdot \frac{100}{1}$ oraz $b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20}$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$a = \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \dots \cdot \frac{99}{2} \cdot \frac{100}{1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} = 1 \text{ czyli } a = 1.$$

oraz:

$$b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20} = \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{19-18}{18 \cdot 19} + \frac{20-19}{19 \cdot 20} =$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) =$$

po wykonaniu redukcji np. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ itd.

$$= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}, \text{ czyli } b = \frac{19}{20}.$$

Zatem $a > b$.

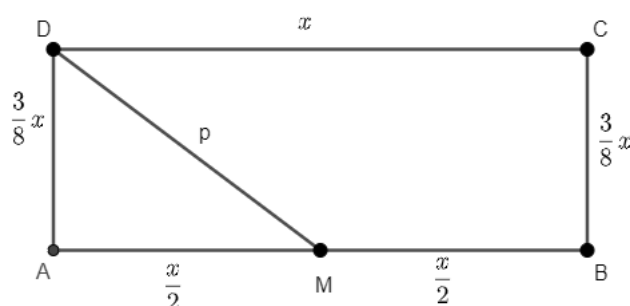
Zadanie 5. W prostokącie ABCD bok AD stanowi $\frac{3}{8}$ boku AB. Z wierzchołka D poprowadzono odcinek do punktu M, będącego środkiem boku AB. Odcinek ten podzielił prostokąt ABCD na dwie figury: trapez o obwodzie 20 cm i trójkąt o obwodzie równym 12 cm. Oblicz długości boków tego prostokąta.

Rozwiązanie:

Oznaczmy: $|AB| = x$, wtedy $|AD| = \frac{3}{8}x$ oraz:

$$|AM| = \frac{x}{2} \text{ i } |MB| = \frac{x}{2}.$$

Niech ponadto: $|DM| = p$



Z warunków zadania mamy:

$$\text{Obw. trapezu} = 20, \text{ tzn. } p + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x + x = 20$$

$$\Downarrow$$

$$p = 20 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x - x. \quad (1)$$

oraz:

$$\text{Obw. trójkąta} = 12, \text{ tzn. } p + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x = 12$$

$$\Downarrow$$

$$p = 12 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x. \quad (2)$$

Z równości (1) i (2) wynika, że:

$$20 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x - x = 12 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x \quad / + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x$$

$$\Downarrow$$

$$20 - x = 12$$

$$\Downarrow$$

$$x = 8$$

Zatem : $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|AD| = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3 \text{ cm}$.