

OD SZKOLNIKA DO ŻAKA

klasy 7 i 8 szkoły podstawowej

rok szkolny 2020/2021

Rozwiązania – etap II

Zadanie 1. Wykaż, że liczba $w = 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18}$ jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}w &= 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18} = 2^{15} \cdot 1 + 2^{15} \cdot 2 + 2^{15} \cdot 2^2 + 2^{15} \cdot 2^3 = \\&= 2^{15}(1 + 2 + 4 + 8) = 2^{15} \cdot 15 = 2^{14}(2 \cdot 15) = \\&= 2^{14} \cdot 30.\end{aligned}$$

Skoro:

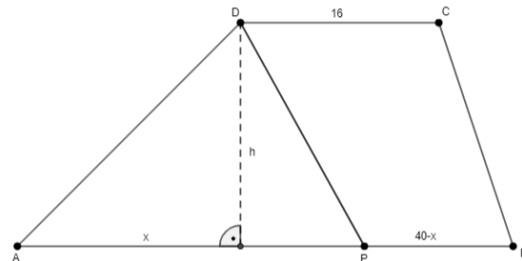
$$w = 2^{14} \cdot 30$$

↓

liczba w jest podzielna przez 30.

Zadanie 3. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości: $|AB| = 40$ i $|CD| = 16$. Punkt P położony na boku AB ma następującą własność: odcinek DP dzieli cały trapez na części o jednakowych polach. Jaka jest długość odcinka AP ?

Rozwiązanie:



$$|AB| = 40, \quad |CD| = 16$$

Odcinek DP dzieli trapez $ABCD$ na dwie figury: trójkąt APD i trapez $PBCD$.

Niech $|AP| = x$, wtedy: $|PB| + x = |AB| = 40$

$\Downarrow$

$$|PB| = 40 - x.$$

Z punktu D prowadzimy wysokość h trapezu $ABCD$.

Wtedy h jest także wysokością z trójkącie APD i trapezie $PBCD$.

Z warunków zadania mamy:

$$P_{\Delta APD} = P_{trap.PBCD}$$

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} ((40 - x) + 16) \cdot h \quad | \cdot 2$$

$$xh = (40 - x + 16) \cdot h \quad | : h$$

$$x = 56 - x$$

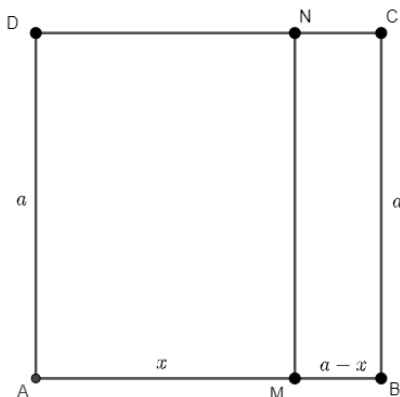
$$2x = 56$$

$$x = 28$$

Odpowiedź: $|AP| = 28$.

Zadanie 4. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, których stosunek pól wynosi 3:1. Wyznacz stosunek obwodów tych prostokątów.

Rozwiązanie:



$$|AB| = |DC| = a$$

$$\text{Niech } |AM| = x;$$

$$\text{wtedy } |MB| = a - x \quad \wedge \quad |MN| = a$$

Z warunków zadania mamy:

$$\frac{P_{AMND}}{P_{MBCN}} = 3:1 = 3$$

$$\frac{x \cdot a}{(a-x) \cdot a} = 3$$

$$\frac{x}{a-x} = 3 \quad / \cdot (a-x)$$

$$x = 3(a-x)$$

$$x = 3a - 3x$$

$$4x = 3a \quad / : 4$$

$$x = \frac{3}{4}a, \text{ czyli: } |AM| = \frac{3}{4}a \text{ i } |MB| = \frac{1}{4}a.$$

$$\text{Wtedy: } Obw_{AMND} = 2x + 2a = 2 \cdot \frac{3}{4}a + 2a = \frac{3}{2}a + 2a = \frac{7}{2}a$$

$$\text{oraz: } Obw_{MBCN} = 2(a-x) + 2a = 2 \cdot \frac{1}{4}a + 2a = \frac{a}{2} + 2a = \frac{5}{2}a$$

$$\text{Zatem: } \frac{Obw_{AMND}}{Obw_{MBCN}} = \frac{\frac{7}{2}a}{\frac{5}{2}a} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 7:5$$

Zadanie 5. Rozwiąż poniższy układ równań w liczbach dodatnich: $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$.

Rozwiązanie:

Szukamy liczb $x > 0$, $y > 0$ takich, że:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \\ x + \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x + \frac{x}{x-1} = 4 \quad / \cdot (x-1)$$

$$x(x-1) + x = 4(x-1)$$

$$x^2 - x + x = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Odpowiedź: Szukane liczby to: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.