



Rozwiązania – etap III (gimnazjum)

Zadanie 1. Załóżmy, że liczby całkowite a , b i c spełniają warunek:

$$(*) \quad a + b + c = bc.$$

Z (*) wynika, że:

$$\begin{cases} a + b = bc - c = c(b - 1) \\ a + c = bc - b = b(c - 1), \end{cases}$$

więc: $(a + b)(a + c) = c(b - 1) \cdot b(c - 1) = \underbrace{[(b - 1)b]}_{2k} \cdot \underbrace{[(c - 1)c]}_{2l} = 2k \cdot 2l = 4(kl)$

ta liczba jest całkowita i
dzieli się przez 2, bo:
dla każdej pary kolejnych
liczb całkowitych
 $(k - 1)$, k jedna z tych liczb
musi być parzysta; zatem
 $(b - 1)b$ da się zapisać
jako $2k$ dla pewnej liczby
całkowitej k

ta liczba całkowita dzieli
się przez 2, więc
 $(c - 1)c = 2l$ dla pewnej
liczby całkowitej l



liczba $(a + b)(a + c)$ jest podzielna przez 4.

Zadanie 2. Mamy kolejno: $|||x-1|-2|-3|-4|=0$

$$|||x-1|-2|-3|-4|=0$$

$$|||x-1|-2|-3|=4$$

$$||x-1|-2|-3|=-4 \quad \text{lub} \quad ||x-1|-2|-3|=4$$

$$|x-1|-2=-1 \quad \quad \quad |x-1|-2=7$$

$$\text{równanie sprzeczne, bo } \forall_{w \in \mathbb{R}} |w| \geq 0 \quad |x-1|-2=-7 \quad \text{lub} \quad |x-1|-2=7$$

$$|x-1|=-5 \quad \text{lub} \quad |x-1|=9$$

$$\text{równanie sprzeczne} \quad x-1=-9 \quad \text{lub} \quad x-1=9$$

$$x=-8 \quad \text{lub} \quad x=10$$

Odpowiedź: $x=-8 \quad \text{lub} \quad x=10$

Zadanie 3. Mamy kolejno:

$$0,(3) + 0,0(3) + 0,00(3) = 0,(3) + \frac{0,(3)}{10} + \frac{0,(3)}{100} = 0,(3) \cdot \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\right] = 0,(3) \cdot \frac{111}{100} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{111}{100} = \frac{37}{100} = 0,37. \quad \text{ponieważ } 0,(3) = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: $0,(3) + 0,0(3) + 0,00(3) = 0,37.$

Zadanie 4. Niech x (zł) oznacza cenę 1kg bananów, jaką zapłacił hurtownik;

$$\frac{4}{5} \cdot 2 \text{ tony} = \frac{4}{5} \cdot 2000 \text{ kg} = 1600 \text{ kg}$$

Z warunków zadania wynika równanie:

$$1600 \cdot (x + 12\% \text{ z } x) + 400 \cdot (x + 5\% \text{ z } x) = 2000x + 424$$

$$1600x + 1600 \cdot \frac{12}{100} x + 400x + 400 \cdot \frac{5}{100} x = 2000x + 424$$

$$2000x + 192x + 20x = 2000x + 424$$

$$212x = 424$$

$$x = 2.$$

Wtedy $2000 \text{ kg} \cdot 2 \text{ (zł/kg)} = 4000 \text{ zł}$

Odpowiedź: Hurtownik zapłacił za wszystkie banany 4000 zł.

Zadanie 5. Mamy:

$$(x - y - 1)^2 + (x + y - 7)^2 = 0 \quad \text{gdzie } (x - y - 1)^2 \text{ i } (x + y - 7)^2 - \text{liczby nieujemne}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x - y - 1)^2 = 0 \quad \text{i} \quad (x + y - 7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x - y - 1 = 0 \quad \text{i} \quad x + y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ 1 + y + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ 2y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Odpowiedź: Szukane liczby to: $x = 4$ i $y = 3$.