



Rozwiązania – etap III (szkoła podstawowa)

Zadanie 1. Zauważmy, że:

liczba: 5^{14} kończy się cyfrą 5;

liczba 10^{19} kończy się cyfrą 0;

liczba $9^{11} = \underbrace{9^2 \cdot \dots \cdot 9^2}_{5 \text{ razy}} \cdot 9 = \underbrace{81 \cdot \dots \cdot 81}_{\text{ten iloczyn kończy się cyfrą 1}} \cdot 9$ kończy się cyfrą 9.

$\Rightarrow$ suma $5^{14} + 10^{19} + 9^{11}$ kończy się cyfrą 4.

Ponadto mamy:

liczba $2^{53} = \underbrace{2^4 \cdot 2^4 \cdot \dots \cdot 2^4}_{13 \text{ razy}} \cdot 2 = \underbrace{16 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 16}_{\text{ta liczba kończy się cyfrą 6}} \cdot 2$ więc kończy się cyfrą 2.

oraz:

liczba $3^{21} = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 3^2}_{10 \text{ razy}} \cdot 3 = \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9}_{10 \text{ razy}} \cdot 3 = \underbrace{81 \cdot 81 \cdot \dots \cdot 81}_{5 \text{ razy ostatni cyfra 1}} \cdot 3$ zatem ten

iloczyn kończy się cyfrą 3.

$\Rightarrow$ suma $2^{53} + 3^{21}$ kończy się cyfrą 5.

Na koniec mamy: $\underbrace{(5^{14} + 10^{19} + 9^{11})}_{= \dots \dots \dots 4} \cdot \underbrace{(2^{53} + 3^{21})}_{= \dots \dots \dots 5}$ - ten iloczyn kończy się cyfrą 0.

Odpowiedź: Ostatnia cyfra liczby $(5^{14} + 10^{19} + 9^{11}) \cdot (2^{53} + 3^{21})$ to 0.

Zadanie 2. Niech x - liczba zadań rozwiązanych bezbłędnie;
wtedy $20 - x$ - liczba zadań z błędem w rozwiązaniu.

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{aligned} 10x + (20 - x) \cdot (-5) &= 80 \\ 10x - 100 + 5x &= 80 \\ 15x - 100 &= 80 \\ 15x &= 180 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Uczeń bezbłędnie rozwiązał 12 zadań, natomiast 8 zadań miało błąd w rozwiązaniu.

Zadanie 3. Zauważmy, że: $7 : 13 = 0, \overbrace{5384615}^{(*)}$

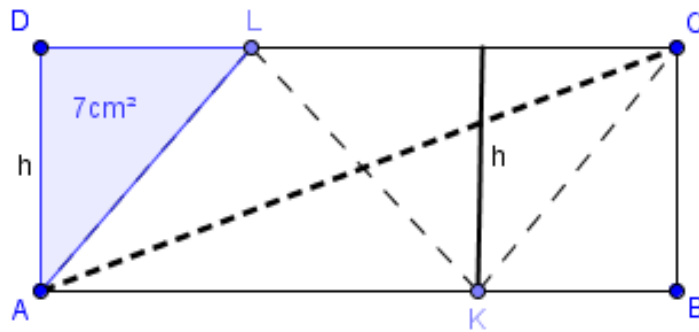
$$\begin{array}{r} -0 \\ \hline 70 \\ -65 \\ \hline 50 \\ -39 \\ \hline 110 \\ -104 \\ \hline 60 \\ -52 \\ \hline 80 \\ -78 \\ \hline 20 \\ -13 \\ \hline 70 \end{array}$$

(*) - ten układ sześciu cyfr będzie się nieskończenie wiele razy powtarzał.

Ponieważ $183 : 6 = 30 \text{ r } 3$, to na 183 miejscu po przecinku pojawi się trzecia cyfra z układu (*), to znaczy cyfra 8.

Odpowiedź: 183 cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{7}{13}$ to 8.

Zadanie 4.



Dane:

$$P_{ABCD} = 42 \text{ cm}^2$$

$$P_{\Delta LDA} = 7 \text{ cm}^2$$

Wystarczy zauważyć, że trójkąty CLK i CLA mają to samo pole – gdyż mają wspólną podstawę CL i tę samą wysokość h . Zatem:

$$(*) \quad P_{\Delta CLK} = P_{\Delta CLA}.$$

co więcej:

$$(**) \quad P_{\Delta LDA} + P_{\Delta CLA} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 42 \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2.$$

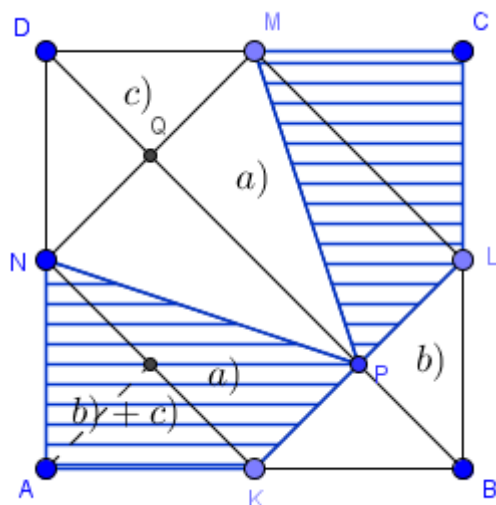
Z (*) i (**) dostajemy, że:

$$7 \text{ cm}^2 + P_{\Delta CLK} = 21 \text{ cm}^2$$

$$P_{\Delta CLK} = 14 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: Trójkąt CLK ma pole równe 14 cm^2 , pole trójkąta LDA wynosi 7 cm^2 , zatem trójkąt CLK ma pole dwa razy większe od pola trójkąta LDA.

Zadanie 5.



Dane: $P_{ABCD} = 36 \text{ cm}^2$;

skoro $ABCD$ jest kwadratem, K, L, M, N są środkami jego boków, to czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, oraz

$$P_{\triangle KPN} = P_{\triangle LPM} \equiv P_{\triangle PMQ}$$

$$P_{\triangle BLP} = P_{\triangle MDQ} = P_{\triangle ANP}$$

$$\text{Zatem: } P_{PLCM} + P_{AKPN} = P_{PLCM} + a) + b) + c) = P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 36 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: Suma pól zakreskowanych czworokątów wynosi 18 cm^2 .