



Rozwiązania – etap II (gimnazjum)

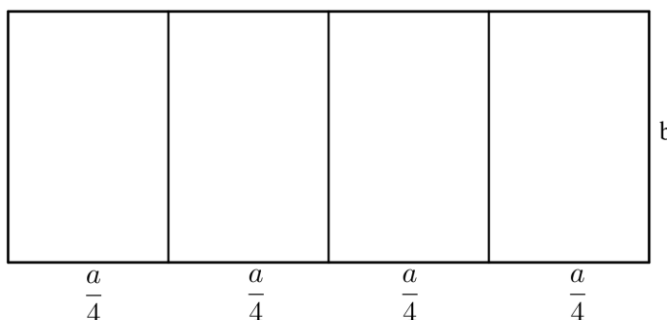
Zadanie 1. Mamy kolejno:

$$2 * 3 \stackrel{\text{z def. „*”}}{=} 2^2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13;$$

$$3 * 2 = 3^2 + 3 \cdot 2 = 9 + 6 = 15;$$

$$\text{więc } (2 * 3) * (3 * 2) = 13 * 15 = 13^2 + 3 \cdot 15 = 169 + 45 = 214.$$

Zadanie 2.



Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 48 \text{ (cm)} \\ 2 \cdot \frac{a}{4} + 2b = 39 \text{ (cm)} \end{cases}$$

$$2a - \frac{a}{2} = 9 \text{ (cm)} \quad / \cdot 2$$

$$4a - a = 18 \text{ (cm)}$$

$$3a = 18 \text{ (cm)}$$

$$a = 6 \text{ cm}$$

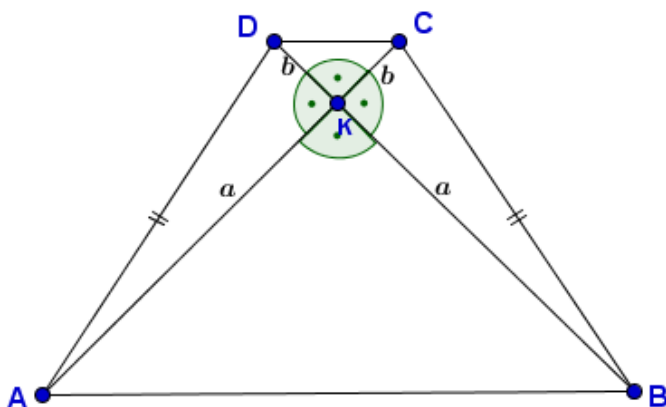
$$\text{ponieważ } 2a + 2b = 48 \text{ (cm)} \Rightarrow 2 \cdot 6 \text{ (cm)} + 2b = 48 \text{ (cm)}$$

$$2b = 36 \text{ (cm)} \quad / : 2$$

$$b = 18 \text{ cm}$$

Odp: Prostokąt o przed rozcięciem miał boki długości: 6 cm i 18 cm.

Zadanie 3.



Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} |AD| = |BC| \text{ (trapez ABCD jest równoramienny)} \\ \angle CKD = 90^\circ \\ |AC| = |BD| = 10 \text{ (cm)}. \end{cases}$$

Oznaczając:

$$|AK| = a = |BK|$$

$$|CK| = b = |DK|$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_{trap.} &= P_{\triangle AKD} + P_{\triangle ABK} + P_{\triangle BKC} + P_{\triangle DKC} = \\ &= \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{1}{2}a \cdot a + \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{1}{2}b \cdot b = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 55 \text{ cm}^2. \\ &(\text{poniewa\k{z } } a+b=10 \text{ cm}) \end{aligned}$$

Odp: Pole trapezu wynosi 55 cm^2 .

Zadanie 4. Niech x, y - długości boków prostokąta na początku,
wtedy $x+2, y+2$ - długości boków po wydłużeniu boków o 2 cm,

$$P_{nowe} = (x+2)(y+2) = P_{stare} + 18 \text{ cm}^2$$

Z warunków zadania:

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ xy + 2x + 2y + 4 &= xy + 18 \\ &\Downarrow \\ 2x + 2y + 4 &= 18 \\ &\Downarrow \\ 2x + 2y &= 14 \text{ cm} \quad / : 2 \\ &\Downarrow \\ x + y &= 7 \text{ cm} \end{aligned}$$

Po skróceniu boków o 1cm:

$$P_{nowe} = (x-1)(y-1) = \underbrace{xy}_{P_{stare}} - x - y + 1 = P_{stare} - (x+y) + 1 = P_{stare} - 7 + 1 = P_{stare} - 6.$$

Odp: Po skróceniu boków prostokąta o 1cm, jego pole zmniejszy się o 6 cm^2 .

Zadanie 5. Metoda I – „elegancka”:

$$\begin{array}{lcl} \text{Skoro:} & \begin{cases} x+y=\sqrt{19} \\ x-y=\sqrt{11} \end{cases} & \text{to: } \begin{cases} (x+y)^2=19 \\ (x-y)^2=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} - \begin{cases} x^2+2xy+y^2=19 \\ x^2-2xy+y^2=11 \end{cases} \\ \hline 4xy=8 \\ xy=2 \end{array} \end{array}$$

Metoda II – typowa, pracochłonna:

$$\begin{array}{l} \text{Niech } x, y - \text{szukane liczby:} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + y = \sqrt{19} \\ x - y = \sqrt{11} \end{array} \right. \\ \hline 2x = \sqrt{19} + \sqrt{11} \\ x = \frac{\sqrt{19} + \sqrt{11}}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ponieważ } x + y = \sqrt{19} \Rightarrow \frac{\sqrt{19} + \sqrt{11}}{2} + y = \sqrt{19} \quad / \cdot 2 \\ \Downarrow \\ \sqrt{19} + \sqrt{11} + 2y = 2\sqrt{19} \\ \Downarrow \\ 2y = \sqrt{19} - \sqrt{11} \quad / : 2 \\ \Downarrow \\ y = \frac{\sqrt{19} - \sqrt{11}}{2} \end{array}$$

$$\text{Wtedy: } xy = \frac{(\sqrt{19} + \sqrt{11})}{2} \cdot \frac{(\sqrt{19} - \sqrt{11})}{2} = \frac{(\sqrt{19})^2 - (\sqrt{11})^2}{4} = \frac{19 - 11}{4} = 2.$$

Odp: Iloczyn tych liczb wynosi 2.