



Rozwiązania – etap III (gimnazjum)

Zadanie 1.

Założmy, że liczba x spełnia równość:

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

⇓ podnosząc stronami do kwadratu

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2$$

⇓ korzystając ze wskazówki

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 16$$

⇓

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

⇓ jeszcze raz podnosząc stronami do kwadratu i korzystając ze wskazówki

$$\left(x^2\right)^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 14^2$$

⇓

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 196$$

⇓

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$$

Zadanie 2.

Mamy kolejno:

$$w := \frac{\sqrt[3]{43 \cdot \sqrt[4]{81}} + 120 \cdot \sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{15 \cdot \sqrt[3]{27}} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}} - \sqrt{\sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{256}} = \left| \begin{array}{l} \text{ale:} \\ \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt[4]{625} = 5, \sqrt[3]{27} = 3 \\ \sqrt[3]{64} = 4, \sqrt[3]{125} = 5, \sqrt[4]{256} = 4 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(43 \cdot 3) + (120 \cdot 5)}}{\sqrt[4]{(15 \cdot 3) + (9 \cdot 4)}} - \sqrt{5 - 4} = \frac{\sqrt[3]{129 + 600}}{\sqrt[4]{45 + 36}} - \sqrt{1} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[4]{81}} - 1 = \left| \begin{array}{l} \text{ale:} \\ \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt[3]{729} = 9 \end{array} \right| = \frac{9}{3} - 1 = 3 - 1 = 2$$

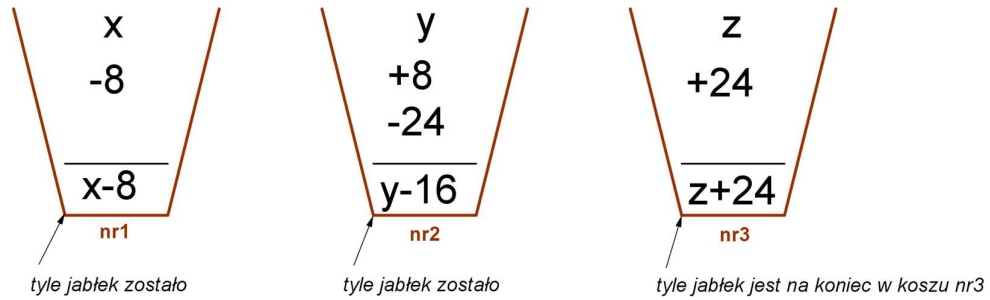
Odp. $w = 2$

Zadanie 3.

Niech: x - liczba jabłek w koszu nr1

y - liczba jabłek w koszu nr2

z - liczba jabłek w koszu nr3

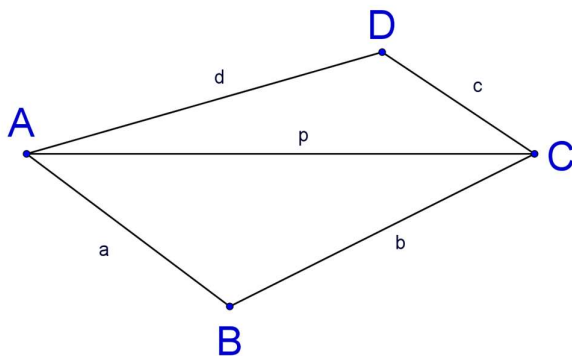


Z warunków zadania mamy:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - 8 = y - 16 = z + 24 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 120 \\ y = x + 8 \\ z = x - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x + 8 + x - 32 = 120 \\ y = x + 8 \\ z = x - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 24 = 120 \\ y = x + 8 \\ z = x - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{144}{3} = 48 \\ y = 48 + 8 = 56 \\ z = 48 - 32 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 56 \\ z = 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Odp. W pierwszym koszu było 48 jabłek, w drugim 56 jabłek, a w trzecim 16 jabłek.

Zadanie 4.



Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} Obw_{\triangle ACD} = 25cm \\ Obw_{\triangle ABC} = 27cm \\ Obw_{ABCD} = 32cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + c + p = 25 \\ a + b + p = 27 \\ (a + b) + (c + d) = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 27 - p(*) \\ c + d = 25 - p(**) \\ (27 - p) + (25 - p) = 32 \end{cases} \Rightarrow$$

$\uparrow$ $z(*)$ $\uparrow$ $z(**)$

$$52 - 2p = 32 \quad / -52$$

$$-2p = -20 \quad / :(-2)$$

$$p = 10$$

Zadanie 5.

Zauważmy, że w wyrażeniu:

$$w = \frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + 10}$$

znajduje się 100 składników postaci: $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}, k = 0, 1, 2, \dots, 99$.

Ale:

$$k = 0, 1, 2, \dots, 99$$

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \stackrel{(\text{wskaźówka})}{=} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2 - (\sqrt{k+1})^2} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(-1)} (*)$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sqrt{0} - \sqrt{1}}{(-1)} + \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{(-1)} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(-1)} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{(-1)} = \\ &= \frac{(\sqrt{0} - \sqrt{1}) + (\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{99} - \sqrt{100})}{(-1)} = \frac{0 - 10}{-1} = 10 \end{aligned}$$

Odp. $w = 10$