



Rozwiązania – etap II (gimnazjum)

Zadanie 1.

Niech $\llbracket xy \rrbracket := 10x + y$ będzie liczbą spełniającą warunki zadania, tzn.:

$$\begin{cases} (10x + y) : (x + y) = 4 \text{ r.6} \\ (10x + y) : (x + y - 2) = 5 \text{ r.3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + y = 4(x + y) + 6 \\ 10x + y = 5(x + y - 2) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x + y) + 6 = 5(x + y - 2) + 3 \\ 10x + y = 4(x + y) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y + 6 = 5x + 5y - 7 \\ 10x + y = 4(x + y) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 13 \Rightarrow$$

szukana liczba : $\llbracket xy \rrbracket := 10x + y = (4 \cdot 13) + 6 = 58$.

Odp. Szukana liczba to 58.

Zadanie 2.

Szukane trzy kolejne liczby naturalne można zapisać w postaci:

$n - 1, n, n + 1$, gdzie $n \geq 2$

Wtedy:

$$(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2 = 3k + 2, \text{ gdzie } n^2 := k \in N$$

$\Downarrow$

liczba $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2$ przy dzieleniu przez 3 da resztę 2.

Zadanie 3.

Niech: M – masa siana na wozie (kg),

x – ilość siana, jaką dziennie zje koza (kg),

y – ilość siana, jaką dziennie zje krowa (kg)

z – ilość siana, jaką dziennie zje owca (kg)

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} \frac{M}{x+y} = 45 \\ \frac{M}{y+z} = 60 \\ \frac{M}{x+z} = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 45(x+y), (I) \\ M = 60(y+z), (II) \\ M = 90(x+z), (III) \end{cases}$$

Nas interesuje wielkość:

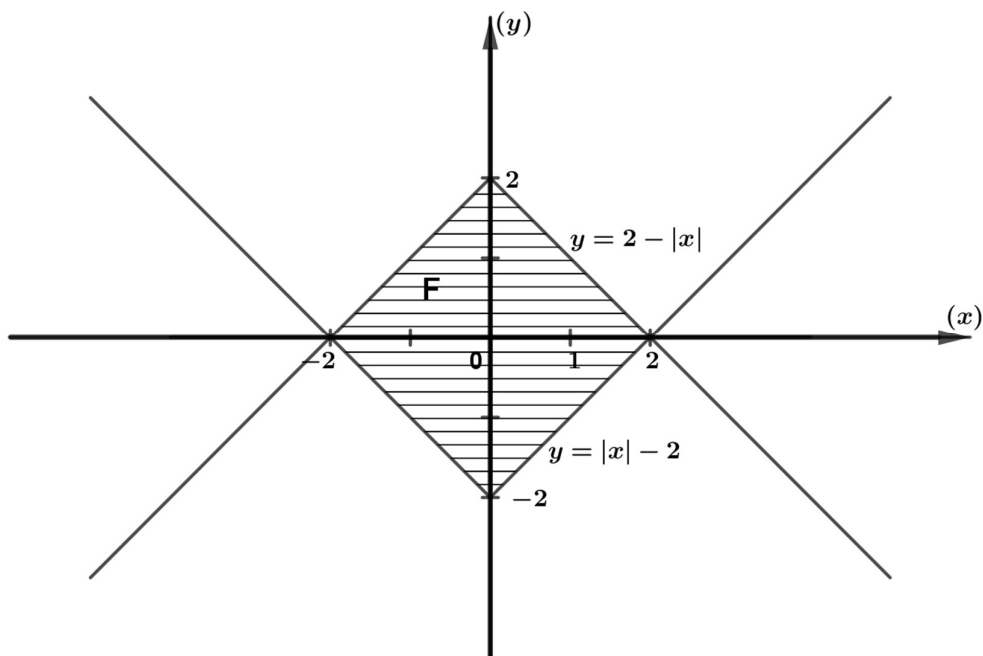
$\frac{M}{x+y+z}$ = ilość dni, w ciągu których zwierzęta, jedząc razem, zjedzą wóz siana.

Zauważmy, że :

$$\begin{aligned} \frac{M}{x+y+z} &= \frac{2M}{2x+2y+2z} = \frac{2M}{(x+y)+(y+z)+(x+z)} \stackrel{(I)-(III)}{=} \frac{2M}{\frac{M}{45} + \frac{M}{60} + \frac{M}{90}} = \frac{2\cancel{M}}{\cancel{M}\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90}\right)} = \\ &= \frac{2}{\frac{4+3+2}{180}} = \frac{2 \cdot 180}{9} = 40 \text{ dni} \end{aligned}$$

Odp. Jedząc razem, zwierzęta zjedzą wóz siana w ciągu 40 dni.

Zadanie 4.



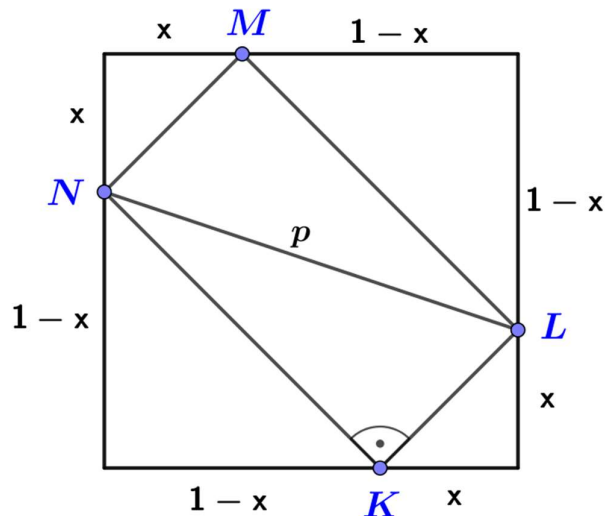
Widać, że figura F jest rombem o przekątnych długości $p = q = 4$.

Wtedy:

$$P_F = \frac{p \cdot q}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} (\text{cm}^2) = 8 \text{cm}^2$$

Odp. $P_F = 8 \text{cm}^2$.

Zadanie 5.



Oznaczmy długości odcinków tak, jak na rysunku.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $|KL| = x\sqrt{2}$ i $|KN| = (1-x)\sqrt{2}$

Skoro:

$$P_{KLMN} = \frac{1}{2} \Rightarrow |KL| \cdot |KN| = \frac{1}{2} \Rightarrow x\sqrt{2} \cdot (1-x)\sqrt{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x(1-x)4 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Wtedy: $|KL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $|KN| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$p = |NL| = \sqrt{|KL|^2 + |KN|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Odp. Długość przekątnej prostokąta $p = 1$