



Rozwiązania – etap I (gimnazjum)

Zadanie 1. Niech $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$ spełniają warunek:

$$a \cdot b = (1 + 2 + \dots + 10) - a - b = 55 - a - b$$

$$\text{ale: } 1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10(1+10)}{2} = 5 \cdot 11 = 55$$

$\Downarrow$

$$a \cdot b + a + b = 55 /_{+1}$$

$\Downarrow$

$$a \cdot b + a + b + 1 = 56$$

$\Downarrow$

$$(a+1)(b+1) = 56$$

$\Downarrow$

$$a+1, b+1 \in D_{56}$$

$\Downarrow$

bez ograniczenia ogólności rozważać: $\begin{cases} a-1=7 \\ b+1=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=7 \end{cases}$

Odp. Szukane liczby to 6 i 7.

Zadanie 2.

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} 1998 \cdot 2000 \cdot 2002 + 8000 &= (2000 - 2) \cdot 2000 \cdot (2000 + 2) + 8000 = \\ &= 2000 \cdot [(2000 - 2)(2000 + 2)] + 8000 = 2000(2000^2 - 4) + 8000 = \\ &= 2000^3 - 4 \cdot 2000 + 8000 = 2000^3, \end{aligned}$$

co dowodzi, że liczba $1998 \cdot 2000 \cdot 2002 + 8000$ jest sześcianem liczby naturalnej ($= 2000$).

Zadanie 3.

Niech: $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ będą szukanyimi trzema kolejnymi liczbami naturalnymi nieparzystymi, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned}(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + 1 &= 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 1 = \\ &= 12n^2 + 12n + 12 = 12 \left(\underbrace{n^2 + n + 1}_{\Rightarrow m \in \mathbb{N}} \right) = 12m\end{aligned}$$

Czyli:

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + 1 \text{ dzieli się przez } 12.$$

Zadanie 4.

$$\text{Skoro: } \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} \text{ } / \cdot 3(a+b) \Rightarrow a \neq 0 \text{ i } 3a = a+b \text{ } / -a \Rightarrow b = 2a$$

$$\text{Wtedy: } \frac{3b}{a+b} = \frac{3 \cdot 2a}{a+2a} = \frac{6a}{3a} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{Odp. } \frac{3b}{a+b} = 2$$

Zadanie 5.

$$\text{Mamy kolejno: } \overbrace{(2x+y+3)^2}^{\geq 0} + \overbrace{(x-2y-1)^2}^{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y+3)^2 = 0 \\ (x-2y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-3/2 \\ x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=-6 \\ x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -4+2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$