

Rozwiązania – etap III (klasy 5 i 6 szkoły podstawowej)

Zadanie 1. Pewna liczba a przy dzieleniu przez 12 daje resztę 2, a inna liczba b przy dzieleniu przez 18 daje resztę 3. Jaką resztę przy dzieleniu przez 6 da liczba $3a + 5b$? Odpowiedź uzasadnij rachunkiem.

Rozwiązanie

Z założeń o a i b dostajemy, że istnieją liczby $k, l \in N$:

$$a = 12k + 2 \quad \wedge \quad b = 18l + 3$$

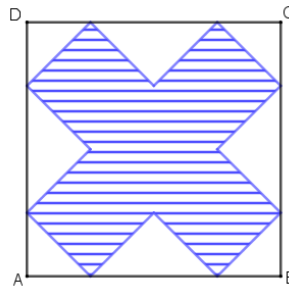
Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} 3a + 5b &= 3(12k + 2) + 5(18l + 3) = 36k + 6 + 90l + 15 = (36k + 90l + 18) + 3 = \\ &= (6 \cdot 6k + 6 \cdot 15l + 6 \cdot 3) + 3 = 6 \cdot \underbrace{(6k + 15l + 3)}_{:=m, m \in N} + 3 = 6m + 3 \end{aligned}$$

skoro $3a + 5b = 6m + 3$, gdzie $m \in N \Rightarrow$

reszta z dzielenia liczby $3a + 5b$ przez 6 jest równa 3.

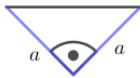
Zadanie 2. W kwadracie ABCD zawarty jest dwunastokąt o obwodzie 48 cm (rysunek poniżej). Każde dwa sąsiednie boki tego dwunastokąta są prostopadłe i równej długości. Oblicz pole kwadratu ABCD.



Rozwiązanie

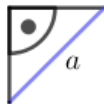
Niech a -długość bloku zakreskowanego 12-kąta. Z warunków zadania mamy: $12a = 48 \text{ cm} \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$. Zakreskowany wielokąt składa się z 5 kwadratów o boku 4 cm, a więc o polu $P_1 = a^2 = 16 \text{ cm}^2$.

Ponadto kwadrat ABCD składa się z 4 trójkątów prostokątnych o kształcie:



czyli polu $P_2 = \frac{a^2}{2} = 8 \text{ cm}^2$

a także z 4 trójkątów postaci:



czyli polu $P_3 = \frac{a^2}{4} = 4 \text{ cm}^2$.

Zatem: $P_{ABCD} = 5 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2 + 4 \cdot P_3 = (5 \cdot 16) + (4 \cdot 8) + (4 \cdot 4) = 80 + 32 + 16 = 128 \text{ cm}^2$.

Zadanie 3. Szerokość pewnego prostokąta zwiększono o $p\%$, gdzie $p = \frac{2^4 - 2^3 + 0,25 \cdot 2^3}{(-1) - (-\frac{3}{2})}$, a długość zmniejszono o 30% . Czy pole tego prostokąta zwiększyło się, czy zmniejszyło i o ile procent?

Rozwiązanie

Niech $a :=$ długość prostokąta przed zmianami,

$b :=$ szerokość prostokąta przed zmianami,

$P = a \cdot b =$ pole prostokąta przed zmianami,

$$p = \frac{2^4 - 2^3 + 0,25 \cdot 2^3}{(-1) - (-\frac{3}{2})} = \frac{16 - 8 + \frac{1}{4} \cdot 8}{\frac{1}{2}} = \frac{8 + 2}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \quad (*)$$

Po zmianach:

$$a' = a - 30\% \text{ z } a = a - 0,30 \cdot a = 0,70a,$$

$$b' = b + p\% \text{ z } b = b + 20\% \text{ z } b = 1,20b,$$

pole po zmianach:

$$P' = a' \cdot b' = 0,7a \cdot 1,2b = 0,84 \cdot (a \cdot b) = 0,84 \cdot P = 84\% \text{ z } P.$$

Odpowiedź Po zmianach pole prostokąta zmniejszyło się o 16% .

Zadanie 4. Znajdź ułamek o mianowniku 250, który jest większy od 0,49 lecz mniejszy od $\frac{13}{25}$.

Rozwiązanie

Jeśli ułamek $= \frac{a}{250}$ ma spełniać nierówność podwójną:

$$0,49 < \frac{a}{250} < \frac{13}{25}$$

$$\frac{49}{100} < \frac{a}{250} < \frac{130}{250}$$

$$\frac{490}{1000} < \frac{4 \cdot a}{1000} < \frac{520}{1000} \quad / \cdot 1000$$

$$490 < 4 \cdot a < 520 \quad / : 4$$

$$\frac{490}{4} < a < \frac{520}{4}$$

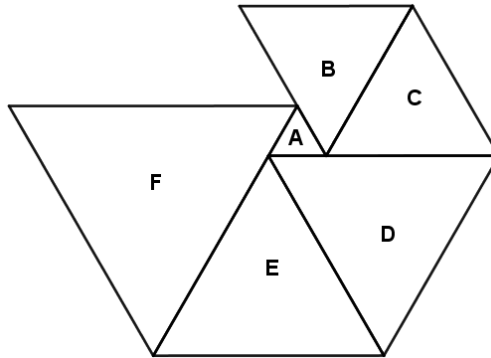
$$122 \frac{1}{2} < a < 130 \quad \text{ i } a \in N$$

$\Downarrow$

$$a \in \{123, 124, 125, 126, 127, 128, 129\}.$$

Odpowiedź Warunki zadania spełnia np. ułamek $\frac{123}{250}$.

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono układ trójkątów równobocznych A, B, C, D, E, F. Obwód trójkąta A jest równy 6 cm, zaś obwód trójkąta B jest równy 18 cm. Wyznacz sumę obwodów wszystkich narysowanych trójkątów.



Rozwiązanie

Niech $a :=$ długość boku trójkąta równobocznego A.

Skoro:

$$\text{Obw.}\Delta_A = 6 = 3a \Rightarrow a = 2 \text{ (cm)}$$

Niech $b :=$ długość boku trójkąta B.

Skoro:

$$\text{Obw.}\Delta_B = 18 \text{ cm} = 3b \Rightarrow b = 6 \text{ (cm)}.$$

Wtedy:

$$c := \text{długość boku trójkąta C} \Rightarrow c = b = 6 \text{ cm} \Rightarrow \text{Obw.}\Delta_C = 3 \cdot c = 18 \text{ cm},$$

$$d := \text{długość boku trójkąta D} \Rightarrow d = a + c = 2 + 6 = 8 \text{ cm} \Rightarrow \text{Obw.}\Delta_D = 3 \cdot d = 24 \text{ cm},$$

$$e := \text{długość boku trójkąta E} \Rightarrow e = d, \text{ czyli } e = 8 \text{ cm} \Rightarrow \text{Obw.}\Delta_E = 3 \cdot e = 24 \text{ cm},$$

$$f := \text{długość boku trójkąta F} \Rightarrow f = e + a = 8 + 2 = 10 \text{ cm} \Rightarrow \text{Obw.}\Delta_F = 3 \cdot f = 30 \text{ cm},$$

Na koniec mamy:

$$\begin{aligned} &\text{Obw.}\Delta_A + \text{Obw.}\Delta_B + \text{Obw.}\Delta_C + \text{Obw.}\Delta_D + \text{Obw.}\Delta_E + \text{Obw.}\Delta_F = \\ &= 6 + 18 + 18 + 24 + 24 + 30 = 120 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Opracował: M.Bednarczyk