

Rozwiązania – etap III

(klasy 7 i 8 szkoły podstawowej i klasa III gimnazjum)

Zadanie 1. Która z liczb jest większa:

$$a = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{2009}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{2011}\right),$$

czy $b = (65-1) \cdot (65-3) \cdot (65-5) \cdot \dots \cdot (65-97) \cdot (65-99)$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Liczba $a = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{2009}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{2011}\right)$ jest iloczynem

skończonej liczby czynników postaci: $1 - \frac{2}{k}$, gdzie $k \in \{3, 5, 7, \dots, 2011\}$. Ponieważ

każdy z tych czynników jest liczbą dodatnią, to $a > 0$. (1)

Liczba $b = (65-1) \cdot (65-3) \cdot (65-5) \cdot \dots \cdot (65-97) \cdot (65-99)$ jest iloczynem

skończonej ilości czynników $w_k := 65 - k$, gdzie $k \in \{1, 3, 5, \dots, 99\}$. Biorąc $k = 65$

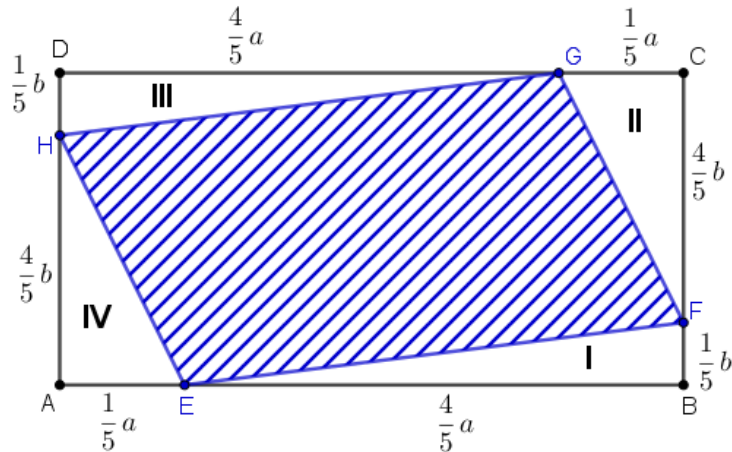
mamy: $w_{65} = 65 - 65 = 0$, a to pociąga za sobą, że $b = 0$. (2)

Z (1) i (2) mamy: $a > b$.

Odpowiedź $a > b$.

Zadanie 2. Dany jest prostokąt ABCD o polu 120 cm^2 . Punkty E, F, G i H dzielą odpowiednio boki AB, BC, CD i DA w stosunku 1:4, tzn. $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|CG|}{|GD|} = \frac{|DH|}{|HA|} = \frac{1}{4}$. Oblicz pole równoległoboku EFGH.

Rozwiązanie



$$|AB| := a, \quad |BC| := b, \quad P_{ABCD} = ab = 120 \text{ cm}^2$$

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{4} \\ |AE| + |EB| = |AB| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |EB| = 4|AE| \\ |AE| + 4|AE| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |EB| = 4|AE| \\ 5|AE| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |EB| = 4|AE| \\ |AE| = \frac{1}{5}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |AE| = \frac{1}{5}a \\ |EB| = \frac{4}{5}a \end{cases};$$

Analogicznie uzasadniając dostaniemy, że: $|BF| = \frac{1}{5}b$, $|FC| = \frac{4}{5}b$.

Mamy wtedy:

$$P_{\Delta I} = P_{\Delta III} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a \cdot \frac{1}{5}b = \frac{2}{25}ab,$$

$$P_{\Delta II} = P_{\Delta IV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}b \cdot \frac{1}{5}a = \frac{2}{25}ab.$$

Na koniec:

$$\begin{aligned} P_{\text{równoległ. EFGH}} &= P - (P_{\Delta I} + P_{\Delta II} + P_{\Delta III} + P_{\Delta IV}) = ab - 4 \cdot \frac{2}{25}ab = \left(1 - \frac{8}{25}\right)ab = \\ &= \frac{17}{25} \cdot ab = \frac{17}{25} \cdot 120 \text{ cm}^2 = 81,6 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Średni wiek trójki dzieci i ich ojca wynosi 21 lat i jest o rok większy od średniego wieku tej trójki dzieci i ich matki. O ile lat ojciec jest starszy od matki?

Rozwiązanie

Niech:

b_1, b_2, b_3 - oznaczają wiek dzieci (w latach);

m - oznacza wiek matki (w latach);

f - oznaczają wiek ojca (w latach).

Z warunków zadania mamy:

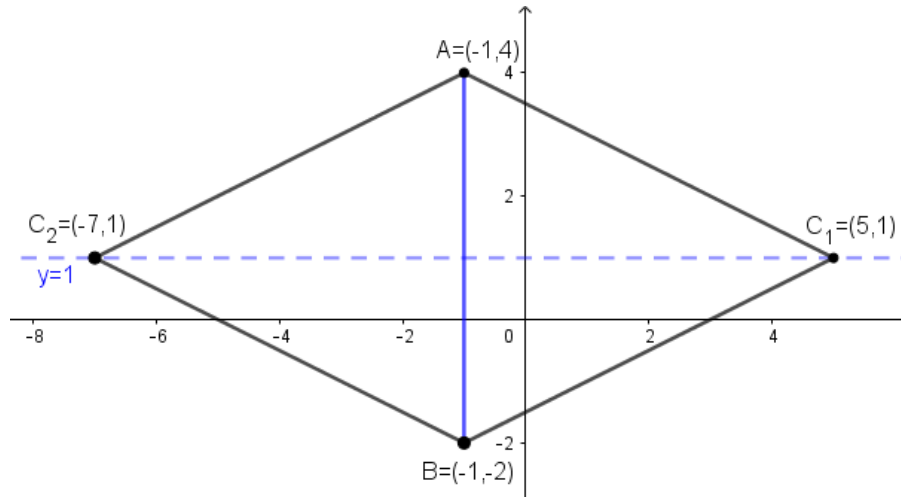
$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_2 + b_3 + f}{4} = 21 \quad / \cdot 4 \\ \frac{b_1 + b_2 + b_3 + m}{4} = 20 \quad / \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + f = 84 \quad (*) \\ b_1 + b_2 + b_3 + m = 80 \quad (**) \end{cases}$$

Wtedy: $f - m = (b_1 + b_2 + b_3 + f) - (b_1 + b_2 + b_3 + m) \stackrel{z(*)i(**)}{=} 84 - 80 = 4$

$\Rightarrow f = m + 4$, czyli ojciec jest o 4 lata starszy od matki.

Zadanie 4. Punkty $A = (-1, 4)$ i $B = (-1, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , którego pole jest równe 18 cm^2 . Znajdź współrzędne punktu C wiedząc, że trójkąt ten jest równoramienny. Rozważ wszystkie możliwe przypadki (pamiętając, że odcinek AB jest podstawą tego trójkąta).

Rozwiązanie



Skoro $\triangle ABC$ jest równoramienny, to jego wierzchołek C leży na symetralnej odcinka AB , czyli na prostej $y = 1$.

Niech h - oznacza długość wysokości tego trójkąta wyprowadzonej z punktu C ;

wtedy:

$$18 \text{ cm}^2 = P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h \quad / : 2$$

↓

$$|AB| \cdot h = 36 \text{ cm}^2 \quad \text{i} \quad |AB| = 6 \text{ cm}$$

↓

$$6 \text{ cm} \cdot h = 36 \text{ cm}^2 \quad / : 6 \text{ cm}$$

$$h = 6 \text{ cm}$$

Od środka odcinka AB odmierzamy na prostej $y = 1$ dwa odcinki długości $h = 6 \text{ cm}$ otrzymując: $C_1 = (5, 1)$ i $C_2 = (-7, 1)$.

Zadanie 5. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że: $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1$.

Rozwiązanie

Weźmy dowolne liczby $a, b, c > 0$ i zauważmy że:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} &= \frac{(a+1)-1}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1} \\ &\Downarrow \\ (1) \quad \frac{a}{a+1} &= 1 - \frac{1}{a+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{(a+1)(b+1)} &= \frac{(b+1)-1}{(a+1)((b+1))} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)} \\ &\Downarrow \\ (2) \quad \frac{b}{(a+1)(b+1)} &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} &= \frac{(c+1)-1}{(a+1)((b+1)(c+1))} = \frac{1}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &\Downarrow \\ (3) \quad \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} &= \frac{1}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}; \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} &\stackrel{z (1), (2) i (3)}{=} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)}\right) + \left(\frac{1}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}\right) = \\ &= 1 - \underbrace{\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}}_{>0} \stackrel{!!}{<} 1. \end{aligned}$$

Opracował: M.Bednarczyk