



Rozwiązania – etap II

(klasy 7 i 8 szkoły podstawowej i klasa III gimnazjum)

Zadanie 1. Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, to panowałby przez $\frac{1}{4}$ swego życia.

Gdyby żył o 9 lat dłużej, to panowałby przez połowę swego życia. Ile lat żył a ile lat panował Aleksander Wielki?

Rozwiązanie Niech:

z – długość życia Aleksandra Wielkiego (w latach);

p – długość panowania Aleksandra Wielkiego (w latach).

Z warunków zadania dostajemy, że:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p - 5 = \frac{1}{4}(z - 5) & / \cdot 4 \\ p + 9 = \frac{1}{2}(z + 9) & / \cdot 2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 4p - 20 = z - 5 \\ 2p + 18 = z + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4p - 15 \\ 2p + 18 = 4p - 15 + 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4p - 15 \\ -2p = -18 - 15 + 9 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4p - 15 \\ -2p = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4p - 15 \\ p = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = 12 \\ z = (4 \cdot 12) - 15 = 48 - 15 = 33 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} p = 12 \\ z = 33 \end{cases}. \end{aligned}$$

Odpowiedź Aleksander Wielki żył 33 lata, z czego panował 12 lat.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $a > 1$ i $b > 1$, to: $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} > 1$.

Rozwiązanie Weźmy dowolne liczby $a > 1$ i $b > 1$ i zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} &= \frac{a(a+1) + b(b+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{(a+1)(b+1)} = \\ &= \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + 2ab + a + b}{ab + a + b + 1} = \frac{(a-b)^2 + [ab + a + b] + ab}{ab + a + b + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(*)}{>} \frac{(a-b)^2 + (ab + a + b + 1)}{ab + a + b + 1} \stackrel{!}{=} \frac{(a-b)^2}{ab + a + b + 1} + \frac{ab + a + b + 1}{ab + a + b + 1} \\ &\quad \uparrow \\ \text{ale } a > 1 \text{ i } b > 1, \text{ więc } ab > 1 \text{ (!)} &\quad = 1 + \underbrace{\frac{(a-b)^2}{ab + a + b + 1}}_{\geq 0 \text{ (!)}} \stackrel{(**)}{\geq} 1 \end{aligned}$$

Wobec nierówności (*) i (**) dochodzimy do wniosku, że: $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \stackrel{!!}{>} 1$.

Zadanie 3. Dla liczby naturalnej n przez $p(n)$ oznaczmy iloczyn cyfr liczby n . Na przykład:

$$p(7) = 7, \quad p(29) = 2 \cdot 9 = 18, \quad p(345) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Oblicz: $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100)$.

Rozwiązanie Łatwo widzieć, że:

$$p(10) = p(20) = p(30) = \dots = p(100) = 0$$

oraz

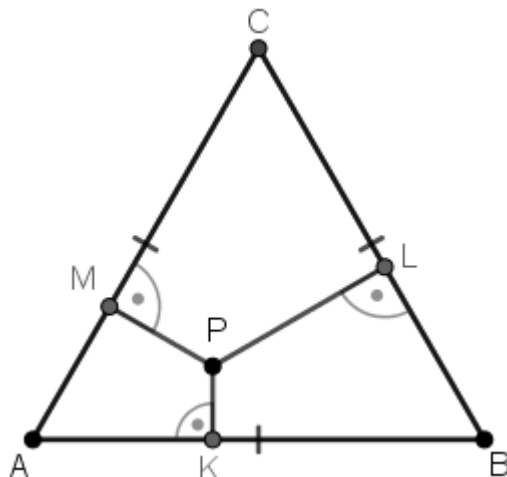
$$\begin{aligned} p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(9) &= 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \\ &= (1+9) + (2+8) + (3+7) + (4+6) + 5 = 45 := b. \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100) &= \\ &= (p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(9)) + \overbrace{p(10)}^{=0} + \\ &+ (p(11) + p(12) + p(13) + \dots + p(19)) + \overbrace{p(20)}^{=0} + \\ &+ (p(21) + p(22) + p(23) + \dots + p(29)) + \overbrace{p(30)}^{=0} + \\ &+ \dots + (p(91) + p(92) + p(93) + \dots + p(99)) + \overbrace{p(100)}^{=0} = \\ \text{z definicji} \rightarrow &= b + b + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 9) + \dots + (9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 9) = \\ &= b + (b + 2b + 3b + \dots + 9b) = b + b(1 + 2 + 3 + \dots + 9) = \\ &= b + b^2 = b(b+1) = 45 \cdot 46 = 2070. \end{aligned}$$

Odpowiedź $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(100) = 2070$.

Zadanie 4. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku długości a obrano dowolnie punkt P i zrzucono go prostopadłe na boki AB, BC i AC, otrzymując odpowiednio punkty K, L, M. Oblicz, ile wynosi suma długości: $|KP| + |LP| + |MP|$.

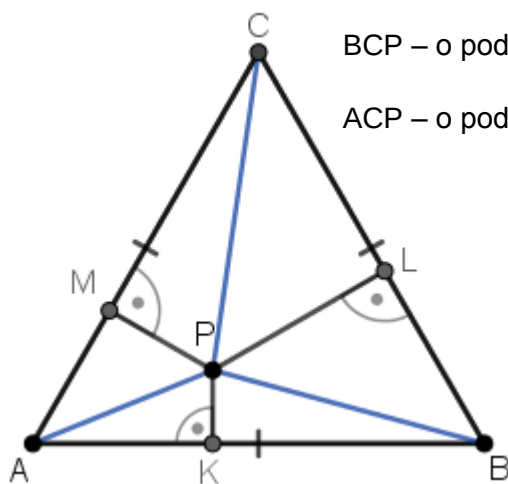


Rozwiązanie Połączmy punkt P odcinkami z wierzchołkami trójkąta ABC.

Otrzymujemy trójkąty: ABP – o podstawie długości a i wysokości $|KP|$;

BCP – o podstawie długości a i wysokości $|LP|$;

ACP – o podstawie długości a i wysokości $|MP|$.



Wtedy:

$$\begin{aligned}
 P_{\triangle ABP} + P_{\triangle BCP} + P_{\triangle ACP} &= P_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \\
 \Downarrow \\
 \frac{1}{2} a \cdot |KP| + \frac{1}{2} a \cdot |LP| + \frac{1}{2} a \cdot |MP| &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad / : 2 \\
 \Downarrow \\
 a \cdot (|KP| + |LP| + |MP|) &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \quad / : a \\
 \Downarrow \\
 |KP| + |LP| + |MP| &= \frac{a \sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Zadanie 5. Rozwiąż układ równań:

$$(*) \quad \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y + t = 10 \\ x + z + t = 12 \\ y + z + t = 15. \end{cases}$$

Rozwiązanie Ponumerujmy równania układu (*) cyframi rzymskimi.

Dodając te równania stronami dostajemy, że:

$$3x + 3y + 3z + 3t = 51 \quad / :_3$$

$$(1) \quad x + y + z + t = 17.$$

Wtedy:

$$\text{z (1) i (I) mamy: } \underbrace{(x + y + z)}_{=14 \text{ z (I)}} + t = 17 \Rightarrow 14 + t = 17 \Rightarrow t = 3;$$

$$\text{z (1) i (II) mamy: } \underbrace{(x + y + t)}_{=10 \text{ z (II)}} + z = 17 \Rightarrow 10 + z = 17 \Rightarrow z = 7;$$

$$\text{z (1) i (III) mamy: } \underbrace{(x + z + t)}_{=12 \text{ z (III)}} + y = 17 \Rightarrow 12 + y = 17 \Rightarrow y = 5;$$

$$\text{z (1) i (IV) mamy: } x + \underbrace{(y + z + t)}_{=15 \text{ z (IV)}} = 17 \Rightarrow x + 15 = 17 \Rightarrow x = 2.$$

M. Bednarczyk