



Rozwiązania – etap I

(klasy 7 i 8 szkoły podstawowej i klasa III gimnazjum)

Zadanie 1. Oblicz wartość liczby: $a = \sqrt{1+2004 \cdot \sqrt{1+2003 \cdot \sqrt{1+2002 \cdot \sqrt{1+2001 \cdot 1999}}}}$.

Rozwiązanie Obliczmy najpierw:

$$\sqrt{1+2001 \cdot 1999} = \sqrt{1+(2000+1)(2000-1)} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{1+2000^2-1^2} = \sqrt{2000^2} = 2000;$$

bo : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

następnie mamy:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2002 \cdot \sqrt{1+2001 \cdot 1999}} &= \sqrt{1+2002 \cdot 2000} = \sqrt{1+(2001+1)(2001-1)} \overset{!}{=} \\ &= \sqrt{1+2001^2-1^2} = \sqrt{2001^2} = 2001; \end{aligned}$$

następnie uzasadniając jak wyżej dostajemy, że:

$$\sqrt{1+2003 \cdot \sqrt{1+2002 \cdot \sqrt{1+2001 \cdot 1999}}} = \sqrt{1+2003 \cdot 2001} \overset{!}{=} \dots = 2002,$$

i jeszcze raz przez analogię dostajemy, że $a \overset{!!}{=} 2003$.

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a+b}{a-b}$, jeśli wiadomo, że liczby a, b spełniają równość:

$$2a^2 + 4ab = ab + 2b^2.$$

Rozwiązanie Skoro liczby a, b spełniają równość: $2a^2 + 4ab = ab + 2b^2$ (*)

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \\
 &2a(a + 2b) = b(a + 2b) \\
 &\Leftrightarrow \\
 &2a(a + 2b) - b(a + 2b) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \\
 &(a + 2b)(2a - b) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \\
 &a + 2b = 0 \quad \vee \quad 2a - b = 0 \\
 &\Leftrightarrow \\
 &\underbrace{a = -2b}_{(1)} \quad \vee \quad \underbrace{b = 2a}_{(2)}
 \end{aligned}$$

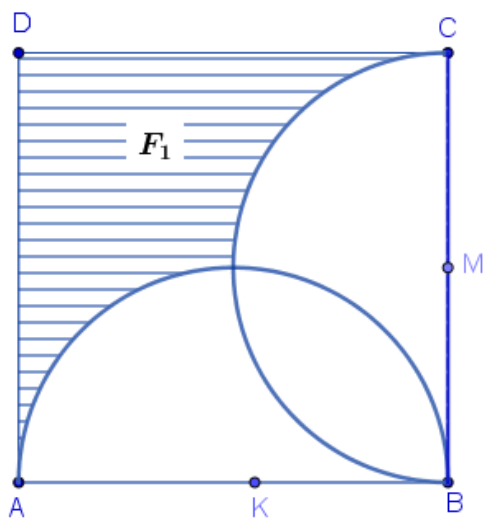
Wtedy:

- gdy zachodzi (1), tzn. $a = -2b$, to mamy: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{-2b+b}{-2b-b} = \frac{-b}{-3b} = \frac{1}{3};$

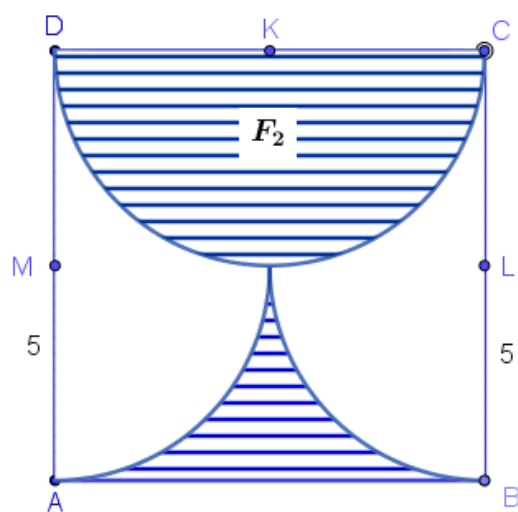
- gdy zachodzi (2), tzn. $b = 2a$, to mamy: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+2a}{a-2a} = \frac{3a}{-a} = -3.$

Odpowiedź Jeśli liczby a, b spełniają równość (*), to $\frac{a+b}{a-b} \in \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}.$

Zadanie 3. Ile wynosi różnica pól figury F_1 (Rys. a)) i figury F_2 (Rys. b)), jeśli bok kwadratu ABCD ma długość 10 cm ?

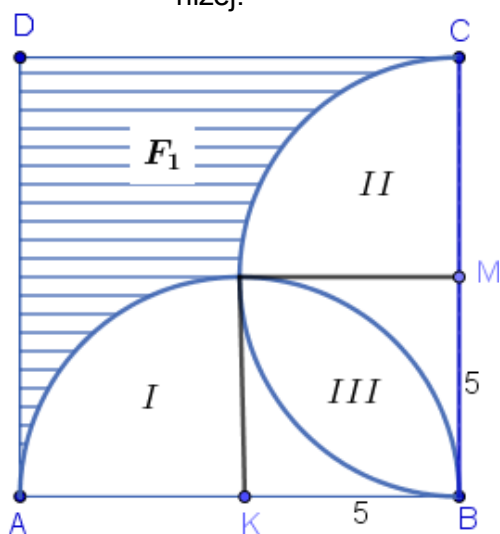


Rys. a)



Rys. b)

Rozwiązanie Żeby policzyć pole figury F_1 podzielmy kwadrat na części, tak jak na rysunku niżej:



Wtedy:

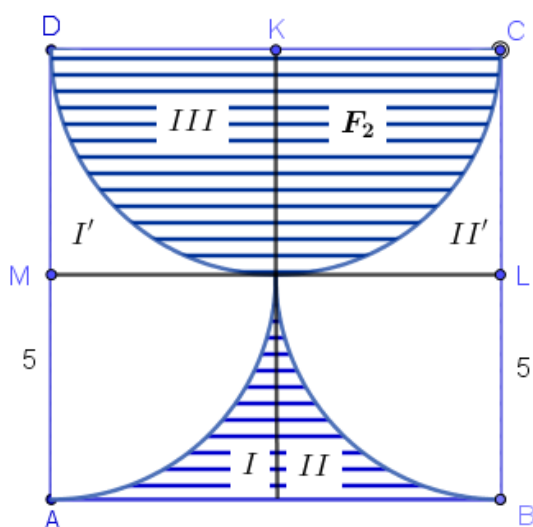
$$P_I = P_{II} = \frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 \Rightarrow P_I + P_{II} = \frac{\pi \cdot 5^2}{2}$$

$$P_{III} = 5^2,$$

więc:

$$\begin{aligned} P_{F_1} &= 10^2 - (P_I + P_{II} + P_{III}) = 100 - \left(\frac{\pi \cdot 5^2}{2} + 5^2 \right) = \\ &= 100 - \frac{25}{2} \pi - 25 = 75 - \frac{25}{2} \pi \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Żeby obliczyć pole figury F_2 podzielmy kwadrat na części, tak jak na poniższym rysunku:



Zauważamy, że $P_I = P_{II} = P_{I'} = P_{II'}$, oraz:

$$\begin{aligned} P_{F_2} &= (P_{I'} + P_{II'}) + P_{III} = (P_I + P_{II}) + P_{III} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \\ &= 50 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Na koniec mamy:

$$P_{F_1} - P_{F_2} = 75 - \frac{25}{2} \pi - 50 = 25 - \frac{25}{2} \pi = 25 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) (< 0)$$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie $|||x| - 1| - 2| - 3| - 4| = 0$.

$$\begin{aligned} & \text{bo } |w| = 0 \Leftrightarrow w = 0 \\ \text{\textbf{Rozwi\u0105zanie}} \quad & \text{Mamy kolejno: } \left| \underbrace{||x|-1|-2|-3|-4}_w \right| = 0 \Leftrightarrow ||x|-1|-2|-3|-4 = 0 \\ & \Updownarrow \\ & ||x|-1|-2|-3| = 4 \\ & \Updownarrow \\ & ||x|-1|-2|-3 = -4 \vee ||x|-1|-2|-3 = 4 \\ & \Updownarrow \\ & ||x|-1|-2| = -1 \vee ||x|-1|-2| = 7 \\ & \forall_{x \in \mathbb{R}} \overset{\text{sprzeczne, bo}}{|x| \geq 0} \quad \vee \quad \Updownarrow \\ & |x|-1-2 = -7 \vee |x|-1-2 = 7 \\ & \Updownarrow \\ & |x|-1 = -5 \vee |x|-1 = 9 \\ & \text{sprzeczne} \quad \Updownarrow \\ & |x|-1 = -9 \vee |x|-1 = 9 \\ & \Updownarrow \\ & |x| = -8 \vee |x| = 10 \\ & \text{sprzeczne} \quad \Updownarrow \\ & x = -10 \vee x = -10. \end{aligned}$$

Zadanie 5. Suma dwóch ułamków wynosi $\frac{53}{80}$. Liczniki tych ułamków są w stosunku 5 : 7, a mianowniki w stosunku 4 : 5. Znajdź te ułamki.

Rozwiązanie: Niech ułamki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ spełniają warunki zadania, tzn. niech

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{53}{80} & (*) \\ \frac{a}{c} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7a = 5c \quad /5 \Rightarrow c = \frac{7}{5}a & (1) \\ \frac{b}{d} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5b = 4d \quad /4 \Rightarrow d = \frac{5}{4}b & (2) \end{cases}$$

Wstawiając informacje o c i d do równania $(*)$ dostajemy: $\frac{a}{b} + \frac{\frac{7}{5}a}{\frac{5}{4}b} = \frac{53}{80}$

$$\frac{a}{b} \left(1 + \frac{\frac{7}{5}}{\frac{5}{4}} \right) = \frac{53}{80} \Rightarrow \frac{a}{b} \left(1 + \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{4}{5} \right) \right) = \frac{53}{80}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{53}{255} = \frac{53}{80} \quad / \cdot \frac{25}{53}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}.$$

z (1) i (2)

Wtedy: $\frac{c}{d} = \frac{\frac{7}{5}a}{\frac{5}{4}b} = \frac{28}{25} \cdot \frac{a}{b} = \frac{28}{25} \cdot \frac{5}{16} = \frac{7}{20}$; czyli $\frac{c}{d} = \frac{7}{20}$.

M.Bednarczyk