ĆWICZENIE 1

Identyfikacja obiektów dynamicznych

1.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest ilustracja częstotliwościowych i czasowych metod identyfikacji obiektów dynamicznych.

1.2 Identyfikowane modele

Badane obiekty dynamiczne modelowane są odpowiednią operatorową transmitancją:

a) układ inercyjny pierwszego rzędu

$$G(s) = \frac{k_p}{1 + sT_p} \tag{1.1}$$

gdzie k_p jest statycznym wzmocnieniem, T_p oznacza stałą czasową.

b) układ inercyjny pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym

$$G(s) = \frac{k_p}{1 + sT_p} \cdot e^{-sT_0} \tag{1.2}$$

gdzie k_p jest statycznym wzmocnieniem, T_p oznacza stałą czasową, zaś T_0 reprezentuje opóźnienie transportowe.

c) układ całkujący

$$G(s) = \frac{1}{sT_i} \tag{1.3}$$

gdzie T_i oznacza stałą całkowania.

d) układ drugiego rzędu

$$G(s) = \frac{1}{1 + sa_1 + s^2 a_2} = \frac{1}{1 + s2\zeta\tau + s^2\tau^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + s2\zeta\omega_n + s^2} \tag{1.4}$$

gdzie ζ jest współczynnikiem tłumienia, zaś $\omega_n = 1/\tau$ reprezentuje pulsację naturalną (pulsację drgań nietłumionych).

e) układ nieminimalnofazowy

$$G(s) = \frac{1 - sT_x}{1 + sT_y} \tag{1.5}$$

gdzie T_x jest stałą czasową zera, zaś T_y reprezentuje stałą czasową bieguna.

Identyfikacji podlegają odpowiednie parametry transmitancji (1.1)-(1.5).

1.2.1 Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu

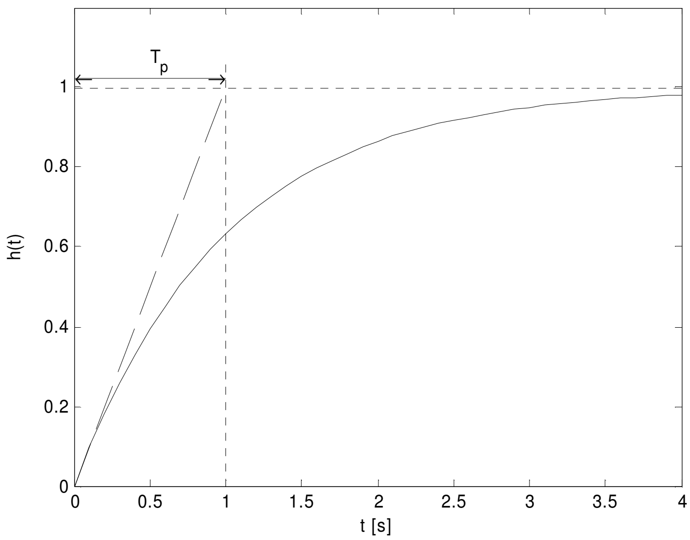
Odpowiedź impulsową obiektu inercyjnego pierwszego rzędu (1.1) opisuje wzór

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{k_p}{T_p} e^{-t/T_p} \cdot \mathbf{1}(t) \tag{1.6}$$

Odpowiedź skokowa tego członu dana jest wzorem

$$h(t) = L^{-1}[G(s)/s] = k_p(1 - e^{-t/T_p}) \cdot \mathbf{1}(t) \tag{1.7}$$

zaś przykładowy przebieg tej odpowiedzi pokazano na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Odpowiedź skokowa członu dynamicznego pierwszego rzędu dla $k_p = 1$ i $T_p = 1s$.

Ze wzoru (1.6) wynika, iż czas ustalania $T_{s\Delta}$ odpowiedzi skokowej (1.7), definiowany jako

$$T_{s\Delta} = \{t: h(t) = k_p(1 - \Delta)\}, \qquad 0 < \Delta \le 1 \tag{1.8}$$

wynosi

$$T_{s\Delta} = -T_p \cdot \ln \Delta \tag{1.9}$$

Zachodzi ponadto

$$h(t)\big|_{t=T_p} = (1 - e^{-1})k_p \cong 0.6321 \cdot k_p \tag{1.10}$$

$$h(t)\big|_{t\to\infty} = k_p \tag{1.11}$$

Widmowa charakterystyka członu pierwszego rzędu (1.1) dana jest wzorem

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{k_p}{\sqrt{1+\omega^2 T_p^2}} e^{-j\cdot \mathrm{arctg}(\omega T_p)} \tag{1.12}$$

Przykładowy przebieg charakterystyki amplitudowej $M(\omega)$ oraz fazowej $\phi(\omega)$ tego członu pokazano na rys. 1.2. Ze wzoru (1.12) wynika, iż pulsacja trzydecybelowego pasma przenoszenia członu (1.1) wynosi

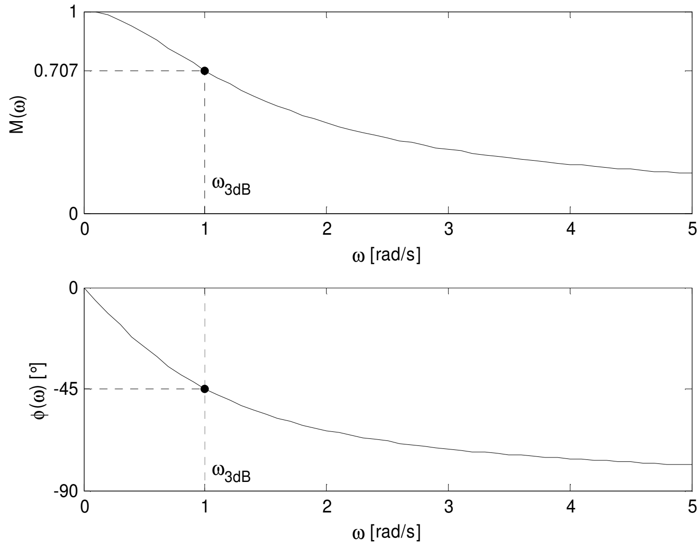
$$\omega_{3\mathrm{dB}} = \frac{1}{T_p} \tag{1.13}$$

czemu odpowiadają następujące wartości charakterystyki amplitudowej oraz fazowej tego członu

$$M(\omega)\big|_{\omega=\omega_{3\mathrm{dB}}} = \frac{k_P}{\sqrt{2}} \tag{1.14}$$

$$\phi(\omega)\big|_{\omega=\omega_{3\mathrm{dB}}} = -45^{\mathrm{o}}\,. \tag{1.15}$$

Wzory (1.9)-(1.11) oraz (1.13)-(1.15) mają istotne praktyczne znaczenie, stanowiąc podstawę prostych reguł identyfikacji członu (1.1).



Rys. 1.2. Częstotliwościowe charakterystyki układu pierwszego rzędu dla $k_p = 1$ i $T_p = 1\mathrm{s}$.

1.2.2 Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym

Skokowa odpowiedź obiektu opisanego transmitancją (1.2) dana jest wzorem

$$h(t) = L^{-1}[G(s)/s] = k_p(1 - e^{-(t-T_0)/T_p}) \cdot \mathbf{1}(t - T_0). \tag{1.16}$$

Zachodzą przeto następujące związki, które można wykorzystać do identyfikacji rozważanego modelu:

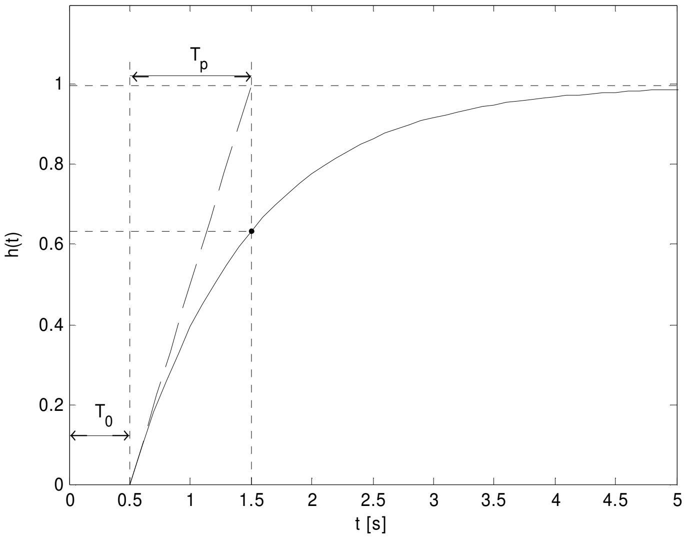
$$h(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \le T_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \max\{t : h(t) = 0\}, \tag{1.17}$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = k_p\,, \tag{1.18}$$

$$h(t)\big|_{t=T_p+T_0} = k_p(1 - e^{-1}) \cong 0.632 \cdot k_p\,, \tag{1.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t)\big|_{t=T_0} = \frac{k_p}{T_p}\,. \tag{1.20}$$

Przebieg przykładowej skokowej odpowiedzi $h(t)$ pokazano na rys. 1.3.



Rys. 1.3. Skokowa odpowiedź układu pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym dla $k_p = 1$, $T_p = 1\text{s}$ oraz $T_0 = 0.5\text{s}$.

Transmitancji (1.2) przyporządkować można charakterystykę amplitudową $M(\omega)$ oraz fazową $\phi(\omega)$:

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = M(\omega)\cdot e^{-j\phi(\omega)} = \frac{k_p}{\sqrt{1+\omega^2 T_p^2}}\,, \tag{1.21}$$

$$\phi(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\omega T_p\right) - \omega T_0\,. \tag{1.22}$$

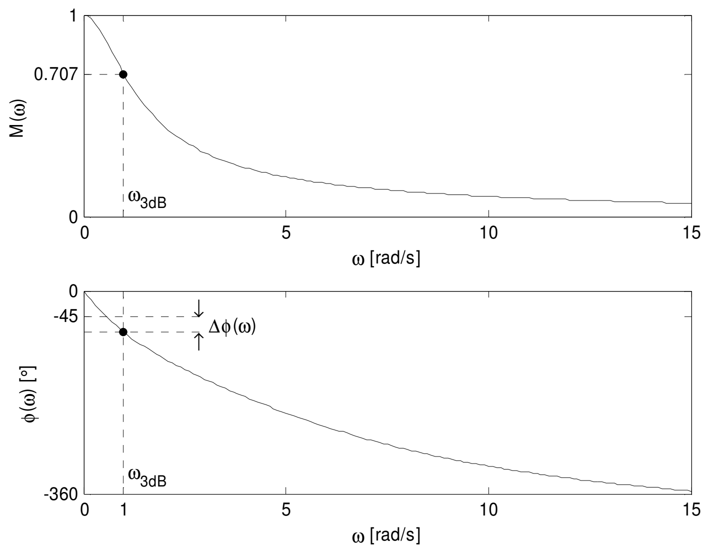
Zachodzą przy tym następujące związki, mogące stanowić podstawę prostych procedur identyfikacji:

$$M(0) = k_p\,, \tag{1.23}$$

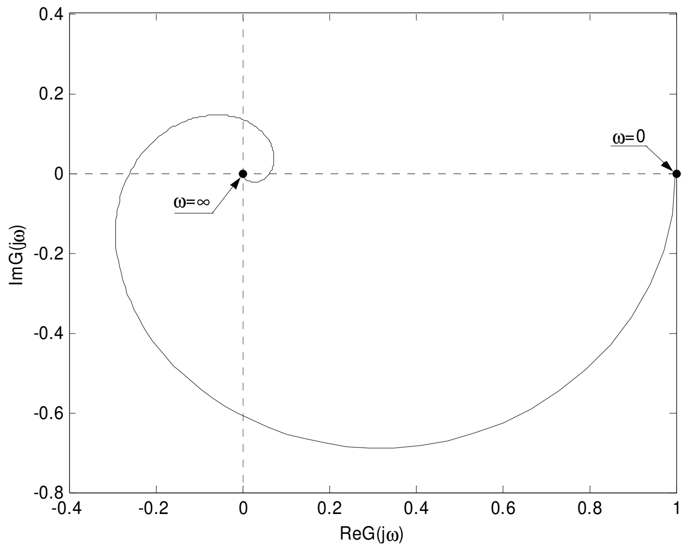
$$M(\omega)\big|_{\omega=\omega_{3\mathrm{dB}}} = \frac{k_P}{\sqrt{2}}, \quad \omega_{3\mathrm{dB}} = \frac{1}{T_p} \quad \Rightarrow \quad T_p = \frac{1}{\omega_{3\mathrm{dB}}}\,, \tag{1.24}$$

$$\phi(\omega)\big|_{\omega=\omega_{3\mathrm{dB}}} = -\frac{\pi}{4} - \frac{T_0}{T_p} \quad \Rightarrow \quad T_0 = -T_p\cdot\left(\varphi_2(\omega_{3\mathrm{dB}}) + \frac{\pi}{4}\right). \tag{1.25}$$

Przykładowe charakterystyki $M(\omega)$ oraz $\phi(\omega)$, dla $k_p = 1$, $T_p = 1\text{s}$ oraz $T_0 = 0.5\text{s}$, pokazano na rys. 1.4 oraz rys. 1.5 charakterystykę Nyquista.



Rys. 1.3. Charakterystyki częstotliwościowe identyfikowanego modelu.



Rys.1.4. Charakterystyka Nyquista identyfikowanego modelu

1.2.3 Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe obiektu całkującego

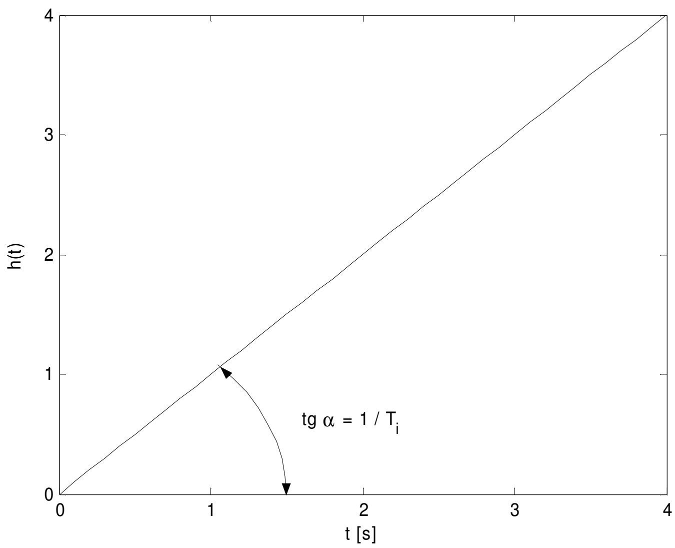
Odpowiedź impulsową obiektu całkującego (1.3) opisuje wzór

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{1}{T_i} \cdot \mathbf{1}(t)\,. \tag{1.26}$$

Odpowiedź skokowa tego członu dana jest wzorem

$$h(t) = L^{-1}[G(s)/s] = \frac{t}{T_i} \cdot \mathbf{1}(t)\,, \tag{1.27}$$

zaś przykładowy przebieg tej odpowiedzi pokazano na rys. 1.5.



Rys. 1.5. Odpowiedź skokowa członu całkującego dla $T_i = 1s$.

Charakterystyka częstotliwościowa członu całkującego (1.3) dana jest wzorem

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{1}{\omega T_i} e^{-j\frac{\pi}{2}} . \tag{1.28}$$

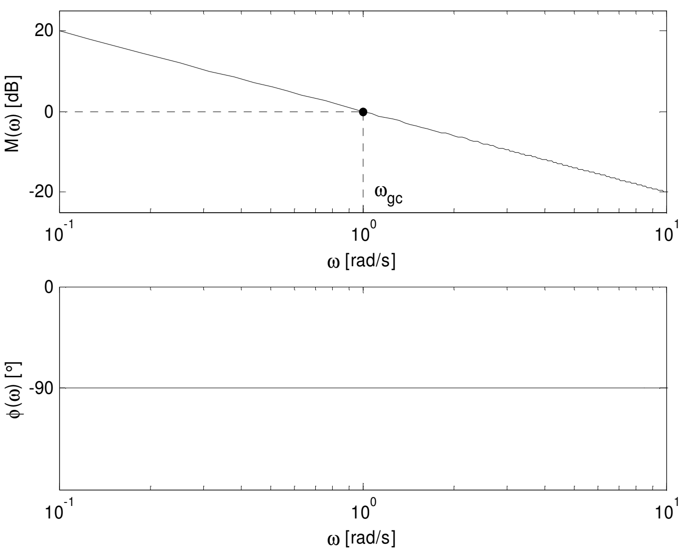
Ze wzoru (1.28) wynika, iż pulsacja odcięcia ω_{gc} członu całkującego (1.3) wynosi

$$\omega_{gc} = \frac{1}{T_i} \tag{1.29}$$

czemu odpowiada następująca wartości charakterystyki amplitudowej tego członu

$$M(\omega)\big|_{\omega=\omega_{gc}} = 0\,\mathrm{dB} = 1 . \tag{1.30}$$

Przykładowy przebieg charakterystyki amplitudowej $M(\omega)$ oraz fazowej $\phi(\omega)$ tego członu pokazano na rys. 1.6.



Rys. 1.6. Charakterystyki Bodego układu całkującego dla $T_i = 1s$.

1.2.4 Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe członu drugiego rzędu

Odpowiedź impulsowa członu drugiego rzędu (1.4) wyraża się wzorem

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_0 t\right] \cdot \mathbf{1}(t)\,, \tag{1.31}$$

przy czym

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)} = \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)}}{\tau} \tag{1.32}$$

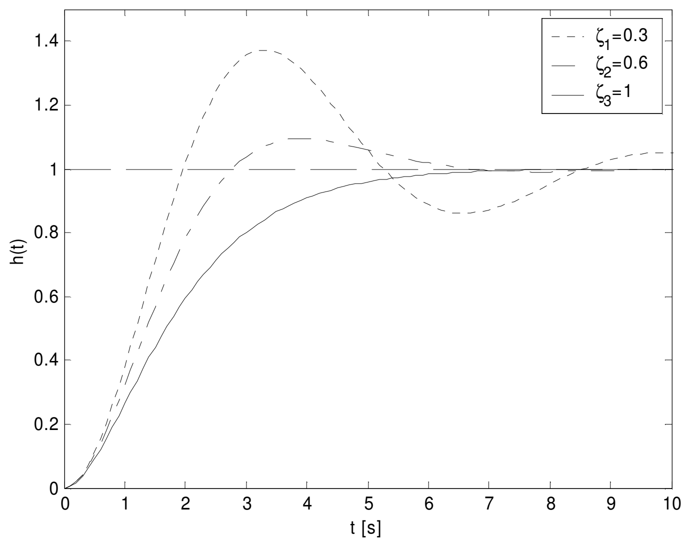
oznacza pulsację drgań tłumionych. Odpowiedź skokową członu (1.4) określa zależność

$$\begin{aligned} h(t) = L^{-1}[G(s)/s] &= \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_0 t + \alpha)\right] \cdot \mathbf{1}(t) = \\ &= \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos\omega_0 t + \frac{\zeta \sin\omega_0 t}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right] \cdot \mathbf{1}(t), \end{aligned} \tag{1.33}$$

gdzie

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)}}{\zeta}\right). \tag{1.34}$$

Przykładowe przebiegi odpowiedzi skokowych dla różnych wartości współczynnika tłumienia ζ pokazano na rys. 1.7.

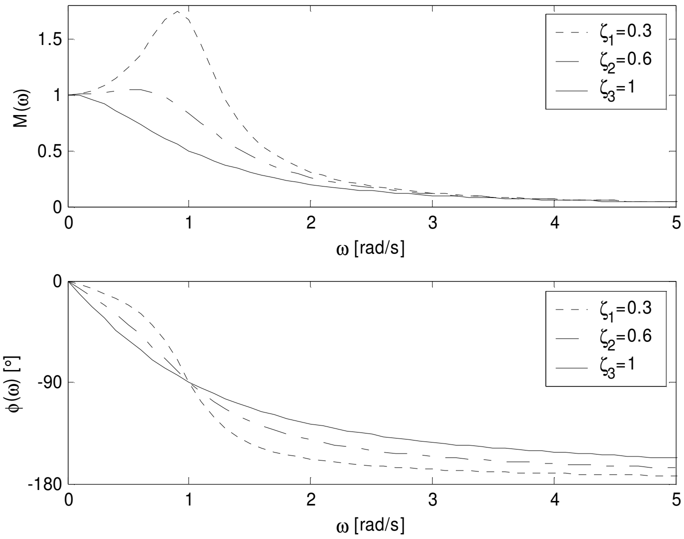


Rys. 1.7. Odpowiedź skokowa członu oscylacyjnego

Widmowa charakterystyka członu drugiego rzędu (1.4) dana jest wzorem

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} e^{-j\cdot\operatorname{arctg}\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}}\,, \tag{1.35}$$

zaś przykładowe przebiegi funkcji $M(\omega)$ oraz $\phi(\omega)$ dla różnych wartości współczynnika tłumienia ζ pokazano na rys. 1.8.



Rys. 1.8. Częstotliwościowe charakterystyki członu oscylacyjnego dla $\tau = 1\mathrm{s}$.

Dla odpowiedzi skokowej $h(t)$ definiuje się następujące wskaźniki (por. rys. 1.9):

a) przeregulowanie κ

$$\kappa = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\% \tag{1.36}$$

gdzie

$$h_{\max} = \max_{t \geq 0} h(t) \tag{1.37}$$

b) czas osiągnięcia maksimum T_κ (czas piku, czas maksimum)

$$T_\kappa = \{t \, : \, h(t) = h_{\max}\} \tag{1.38}$$

c) czas ustalania $T_{s\Delta}$ dla strefy kontrolnej o szerokości 2Δ

$$T_{s\Delta} = \arg \max_{t \geq 0} \{t \colon | \, h(t) - h(\infty) \, | = \Delta \cdot h(\infty)\} \tag{1.39}$$

Odpowiednie wskaźniki definiuje się także dla amplitudowej charakterystyki $M(\omega)$ rozważanego członu dynamicznego (por. rys. 1.10)):

a) wskaźnik oscylacyjności (szczyt rezonansowy) M_r

$$M_r = \frac{M_{\max}}{M(0)} \tag{1.40}$$

gdzie

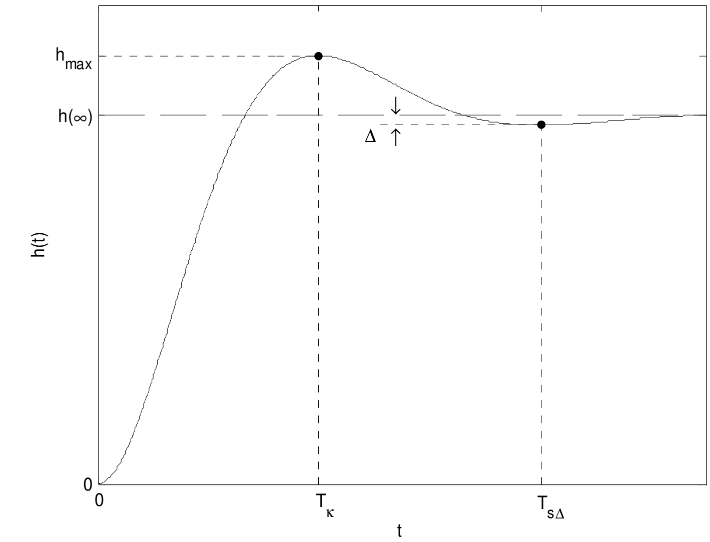
$$M_{\max} = \max_{\omega \geq 0} M(\omega) \tag{1.41}$$

b) pulsacja rezonansowa ω_r

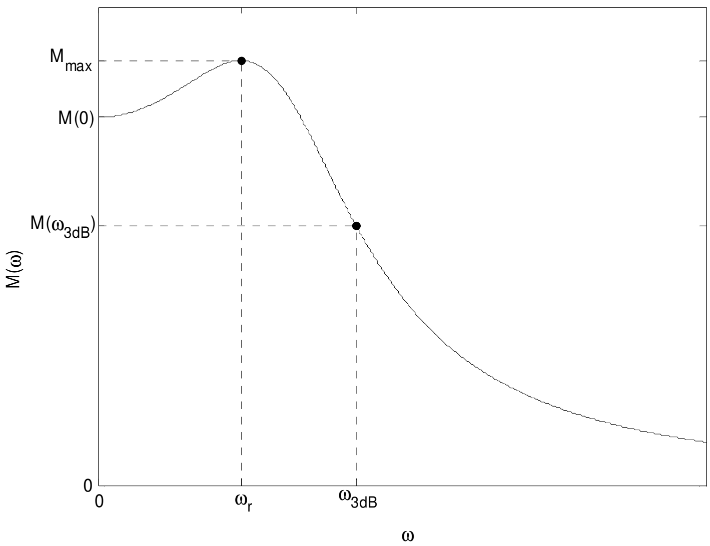
$$\omega_r = \{\omega \; : \; M(\omega) = M_{\max}\} \, , \tag{1.42}$$

c) trzydecybelowe pasmo przenoszenia $\omega_{3\mathrm{dB}}$

$$\omega_{3\mathrm{dB}} = \{\omega \; : \; M(\omega_{3\mathrm{dB}}) = M(0) / \sqrt{2}\} \, . \tag{1.43}$$



Rys. 1.9. Definicja wskaźników dotyczących odpowiedzi skokowej



Rys. 1.10. Definicja wskaźników dotyczących charakterystyki amplitudowej

Przeregulowanie κ oraz czas maksimum T_κ wiążą się z parametrami ζ, $0<\zeta<1$, oraz τ transmitancji operatorowej (1.4) następującymi wzorami

$$\kappa = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right] \tag{1.42}$$

$$T_\kappa = \frac{\tau\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} \tag{1.43}$$

Czas ustalania $T_{s\Delta}$ jest nieciągłą funkcją współczynnika tłumienia ζ, dla której można podać następującą ciągłą funkcję majoryzującą

$$T_{s\Delta} \le \overline{T}_{s\Delta} = \frac{\left|\ln\left(\Delta\sqrt{(1-\zeta^2)}\right)\right|}{\zeta}\cdot\tau, \qquad 0<\zeta<1 \tag{1.44}$$

Ze wzoru (1.44) wynika, iż dla $\Delta = 0.02$ i $\Delta = 0.05$ oraz dla dostatecznie małych wartości ζ obowiązują oszacowania

$$T_{s2\%} \cong \frac{4\tau}{\zeta} \tag{1.45}$$

$$T_{s5\%} \cong \frac{3\tau}{\zeta} \tag{1.46}$$

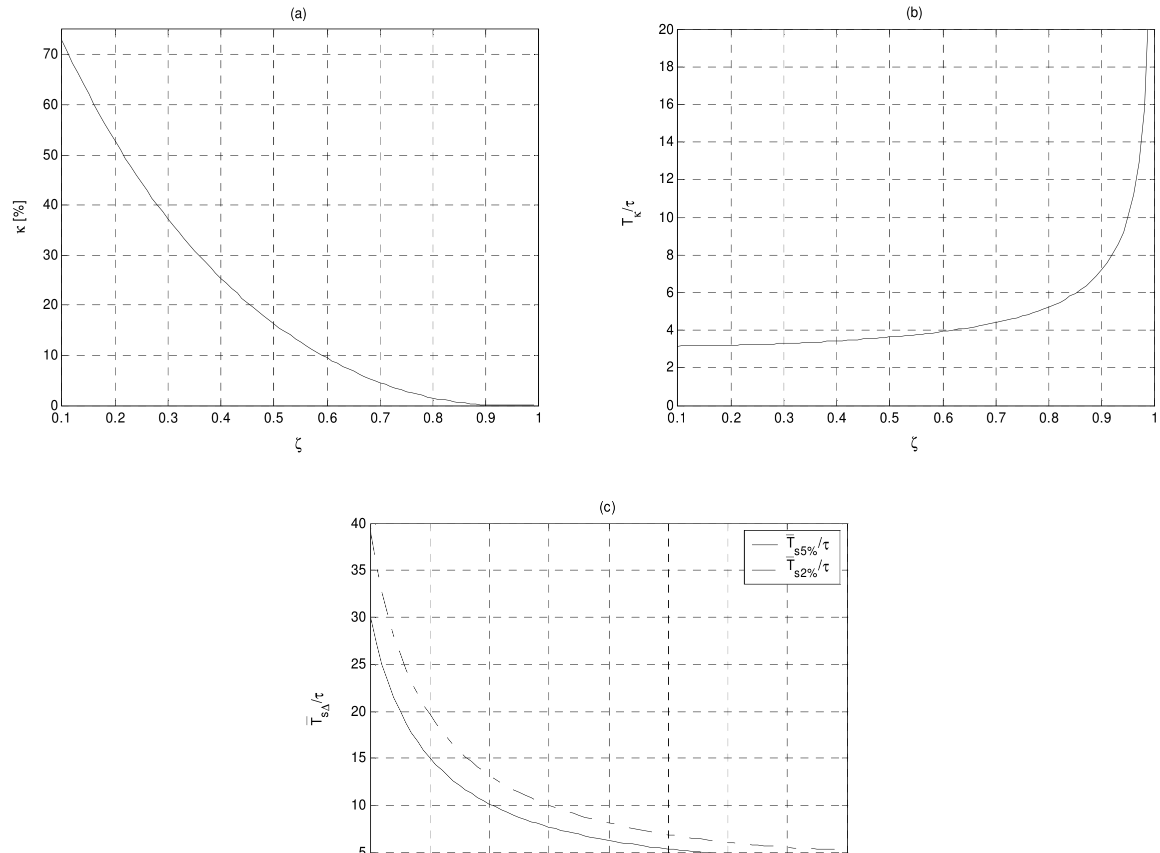
Wskaźniki M_r, ω_r oraz $\omega_{3\mathrm{dB}}$ opisujące amplitudową charakterystykę $M(\omega)$ członu (1.4) związane są z parametrami ζ oraz τ tego członu następującymi formułami:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{(1-\zeta^2)}}, \qquad 0 < \zeta < 1/\sqrt{2} \tag{1.47}$$

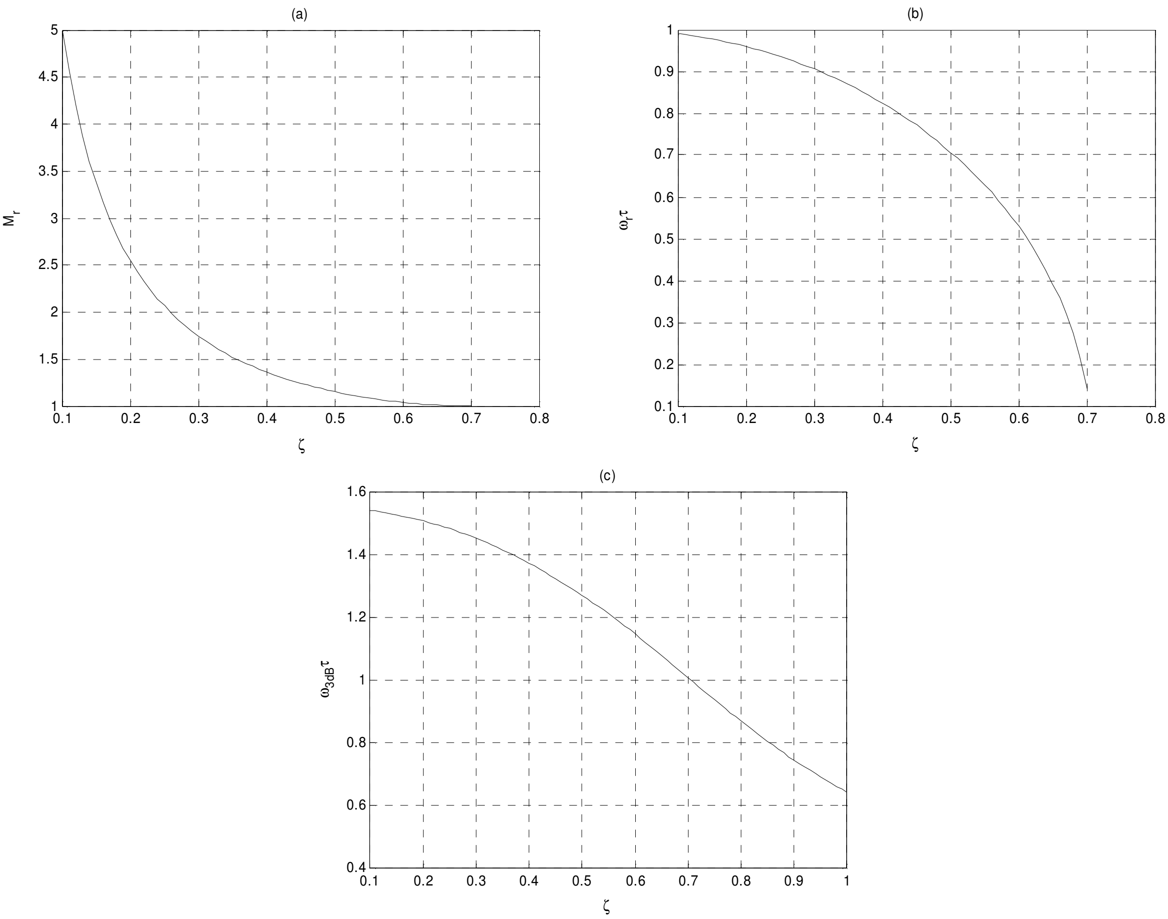
$$\omega_r = \frac{\sqrt{(1-2\zeta^2)}}{\tau}, \qquad 0 < \zeta < 1/\sqrt{2} \tag{1.48}$$

$$\omega_{3\mathrm{dB}} = \frac{\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}}{\tau} \tag{1.49}$$

Wykresy rozważanych wskaźników pokazano na rys. 1.11a-c (wskaźniki dotyczące odpowiedzi skokowej) oraz na rys. 1.12a-c (wskaźniki dotyczące charakterystyki amplitudowej).



Rys. 1.11. Wskaźniki dotyczące odpowiedzi skokowej członu oscylacyjnego



Rys. 1.12. Wskaźniki dotyczące charakterystyki amplitudowej członu oscylacyjnego

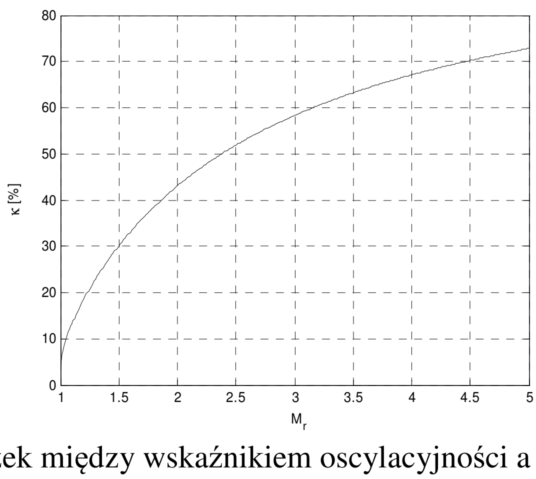
Ze wzoru (1.47) wynika, iż

$$\zeta = \sqrt{\frac{1-\sqrt{(1-M_r^{-2})}}{2}}\,, \qquad M_r \geq 1 \tag{1.50}$$

Zatem, korzystając ze wzoru (1.42) wyznaczyć można zależność przeregulowania κ odpowiedzi skokowej (1.33) od wskaźnika oscylacyjności M_r. Zachodzi ponadto

$$\zeta = \frac{|\ln \kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \kappa}}\,, \qquad \kappa > 0 \tag{1.51}$$

Na podstawie wzoru (1.44) można określić relację wskaźnika oscylacyjności M_r w zależności od przeregulowania , co ilustruje wykres dany na rys. 1.13.

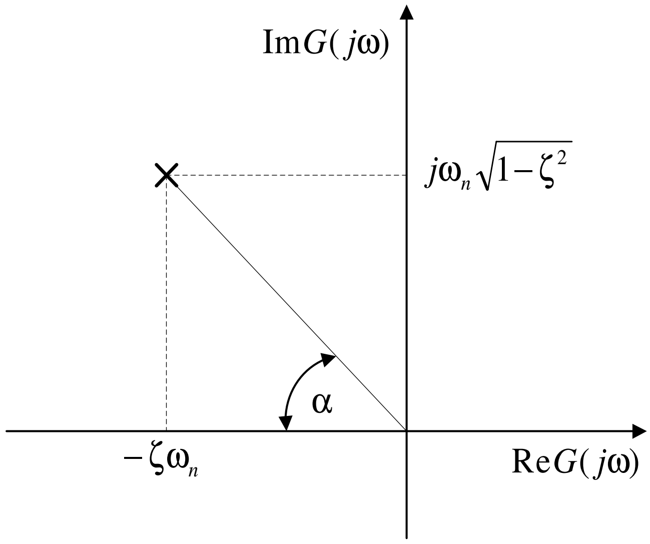


Rys. 1.13. Związek między wskaźnikiem oscylacyjności a przeregulowaniem.

Bieguny $s_{1,2}$ transmitancji operatorowej (1.4) dane są wzorem

$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{1.52}$$

zaś ich rozmieszczenie na płaszczyźnie zespolonej pokazano na rys. 1.14.



Rys. 1.14. Położenie biegunów transmitancji członu oscylacyjnego

Z rysunku tego wynika, iż

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \tag{1.53}$$

a zatem

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)}}{\zeta}\right) = \mathrm{arc\,cos}\zeta \tag{1.54}$$

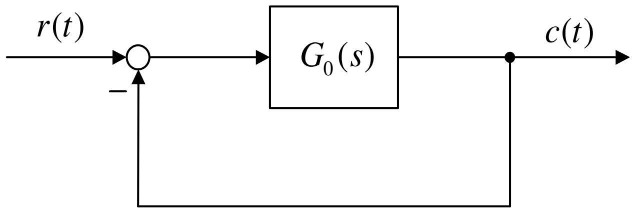
Załóżmy, iż (1.4) oznacza operatorową transmitancję zamkniętego układu sterowania o strukturalnym schemacie danym na rys. 1.15, gdzie

$$G_0(s) = \frac{k}{s(1+Ts)} \tag{1.55}$$

jest transmitancją operatorową układu otwartego, zaś

$$k = \frac{1}{2\zeta\tau} \tag{1.56}$$

$$T = \frac{\tau}{2\zeta} \tag{1.57}$$



Rys. 1.15. Schemat strukturalny układu sterowania

Pulsacja odcięcia ω_{gc} amplitudowej charakterystyki transmitancji rozważanego układu otwartego zdefiniowana jest wzorem

$$|G_0(s)|\Big|_{s=j\omega_{gc}} = 1 \tag{1.58}$$

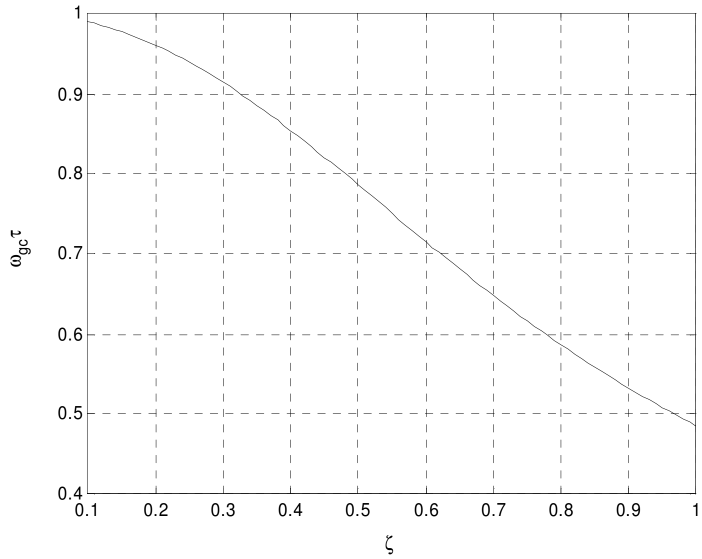
zaś jej związek z parametrami transmitancji (1.4) opisuje formuła

$$\omega_{gc} = \frac{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}{\tau} \tag{1.59}$$

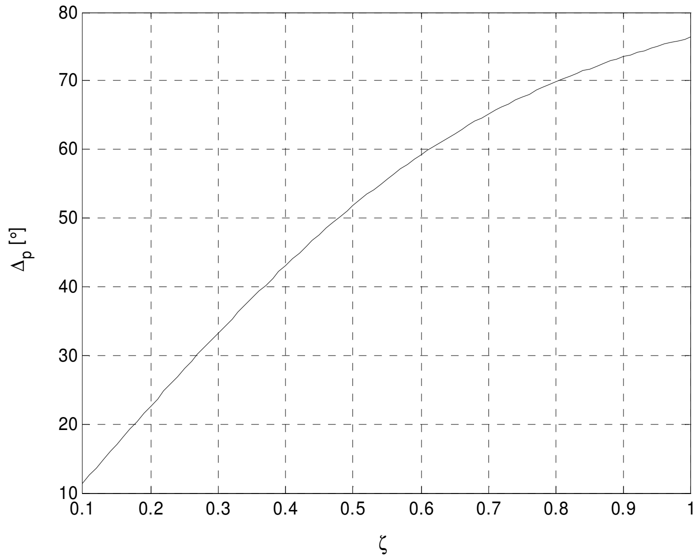
Zapas fazy rozważanego układu sterowania wyraża się wzorem

$$\Delta_p = \pi + \arg G_0(s)\Big|_{s=j\omega_{gc}} = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}\right) \tag{1.60}$$

Przebieg funkcji $\omega_{gc}(\zeta)$ przedstawiono na rys. 1.16, zaś funkcję $\Delta_p(\zeta)$ ilustruje rys. 1.17.



Rys. 1.16. Pulsacja odcięcia ω_{gc} w funkcji współczynnika tłumienia.



Rys. 1.17. Zapas fazy Δ_p w funkcji współczynnika tłumienia.

Niech

$$\omega_{-\pi/2} = \omega\big|_{\arg G(j\omega)=-\pi/2} \tag{1.61}$$

$$M_{-\pi/2} = |G(j\omega)|\big|_{\arg G(j\omega)=-\pi/2} \tag{1.62}$$

$$\overline{\omega}_{gc} = \omega\big|_{|G(j\omega)|=1,\omega>0}\,, \qquad \zeta < 1/\sqrt{2} \tag{1.63}$$

$$\overline{\vartheta}_{gc} = \arg G(j\overline{\omega}_{gc})\,, \qquad 0<\zeta<1/\sqrt{2} \tag{1.64}$$

$$\gamma = \frac{\omega_{3\mathrm{dB}}}{\omega_{gc}} \tag{1.65}$$

Jak łatwo sprawdzić zachodzą następujące relacje:

$$\zeta = \frac{\mathrm{tg}\Delta_p\sqrt{\cos\Delta_p}}{2} \tag{1.66}$$

$$\omega_{gc} = \frac{\omega_{3\mathrm{dB}}\sqrt{\cos\Delta_p}}{\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}} \tag{1.67}$$

$$\omega_{gc} = \frac{\sqrt{(\cos\Delta_p)}}{\tau} = \frac{2\zeta}{\tau\cdot\mathrm{tg}\Delta_p} \tag{1.68}$$

$$\omega_{gc} = \omega_r\sqrt{\frac{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}{1-2\zeta^2}} \tag{1.69}$$

$$\omega_{gc} \approx \frac{6}{T_{s5\%}\mathrm{tg}\Delta_p} \tag{1.70}$$

$$\omega_{gc} \approx \frac{8}{T_{s2\%}\mathrm{tg}\Delta_p} \tag{1.71}$$

$$\omega_{-\pi/2} = \frac{1}{\tau} \tag{1.72}$$

$$M_{-\pi/2} = \frac{1}{2\zeta} \tag{1.73}$$

$$\overline{\omega}_{gc} = \frac{\sqrt{2(1-2\zeta^2)}}{\tau}, \qquad 0 < \zeta < 1/\sqrt{2} \tag{1.74}$$

$$\gamma = \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{(1-2\zeta^2)^2 + 1}} \tag{1.75}$$

Na podstawie powyższych rozważań opracowano tabelę formuł, przydatnych przy identyfikacji modeli drugiego rzędu (Tabela 1.1).

Dane wejściowe	Parametry modelu drugiego rzędu	Ograniczenia
M_r, ω_r	$\zeta = \sqrt{\dfrac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{2M_r}}, \qquad \tau = \dfrac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_r}$	$0 < \zeta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$M_{-\pi/2}, \omega_{-\pi/2}$	$\zeta = \dfrac{1}{2M(\omega_{-\pi/2})\mid}, \qquad \tau = \dfrac{1}{\omega_{-\pi/2}}$	
$\overline{\omega}_{gc}$, $\omega_{-\pi/2}$	$\zeta = \dfrac{\overline{\omega}_{gc}\sqrt{2}}{2\omega_{-\pi/2}}, \qquad \tau = \dfrac{1}{\omega_{-\pi/2}}$	$0 < \zeta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
ω_{3dB}, $\omega_{-\pi/2}$	$\zeta = \dfrac{\sqrt{2\gamma^2 - \gamma^4 + 1}}{2\gamma}, \qquad \tau = \dfrac{1}{\omega_{-\pi/2}}$	
$\overline{\vartheta}_{gc}$, $\overline{\omega}_{gc}$	$\zeta = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\overline{\vartheta}_{gc}}}}}{2} & \overline{\vartheta}_{gc} \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\overline{\vartheta}_{gc}}}}}{2} & \overline{\vartheta}_{gc} > -\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}, \qquad \tau = \dfrac{\sqrt{2(1-2\zeta^2)}}{\overline{\omega}_{gc}}$	$0 < \zeta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
κ, T_κ	$\zeta = \dfrac{\lvert \ln\kappa \rvert}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\kappa}}, \qquad \tau = -\dfrac{\zeta T_\kappa}{\ln\kappa}$	$\kappa > 0$

Tabela 1.1. Formuły służące identyfikacji modelu drugiego rzędu

Należy podkreślić, iż metody identyfikacji oparte o pary danych pomiarowych $(M_{-\pi/2}, \omega_{-\pi/2})$ oraz $(\omega_{3dB}, \omega_{-\pi/2})$ pozwalają na identyfikację członu dynamicznego drugiego rzędu w przypadku, gdy $\zeta \ge 1/\sqrt{2}$, w tym także członu dwuinercyjnego $\zeta \ge 1$.

1.2.5 Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe członu nieminimalnofazowego

Odpowiedź impulsową układu nieminimalnofazowego (1.5) opisuje wzór

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{1}{T_y}\left(1 + \frac{T_x}{T_y}\right)e^{-t/T_y} \cdot \mathbf{1}(t) \tag{1.76}$$

Odpowiedź skokowa tego członu dana jest wzorem

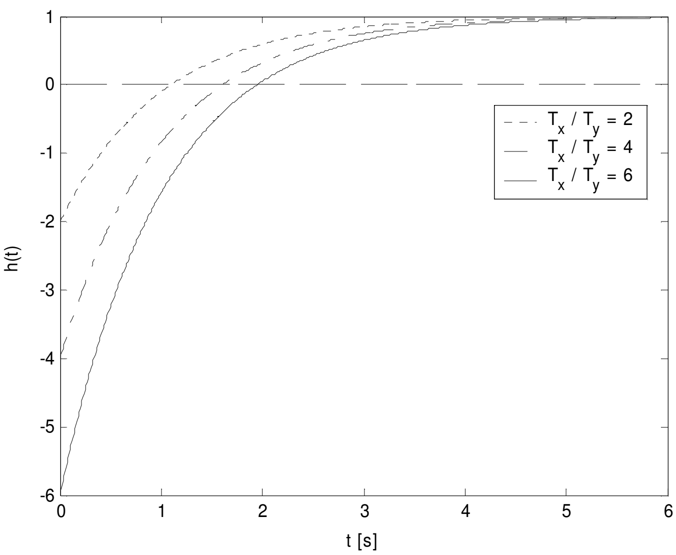
$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = 1 - \left(1 + \frac{T_x}{T_y}\right)e^{-t/T_y} \cdot \mathbf{1}(t) \tag{1.77}$$

zatem dla $T_x > 0$

$$h(0) = \frac{-T_x}{T_y} < 0 \tag{1.78}$$

$$h(\infty) = 1 \tag{1.79}$$

Przykładowe znormalizowane przebiegi odpowiedzi skokowej dla różnych wartości T_x / T_y pokazano na rys.1.18.



Rys. 1.18. Odpowiedź skokowa członu dynamicznego z nieminimalnofazowym zerem.

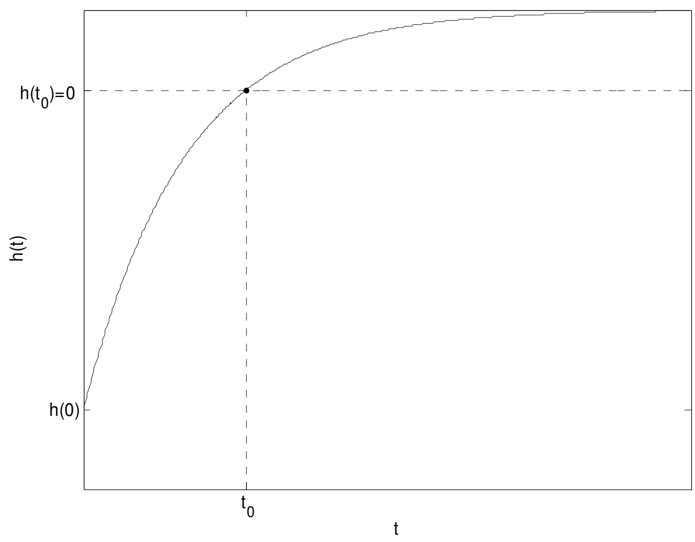
Na podstawie odpowiedzi skokowej można dokonać identyfikacji stałych czasowych T_x oraz T_y. Wprowadza się dodatkową zmienną pomocniczą

$$x = -h(0) = \frac{T_x}{T_y} \tag{1.80}$$

Z kolei na podstawie wzoru (1.77), znając t_0 (Rys. 1.19) jaki upłynął od momentu, gdy odpowiedź $h(t_0) = 0$ można wyznaczyć

$$T_y = \frac{t_0}{\ln(1 + x)} \tag{1.81}$$

Stałą czasową T_x wyznacza się na podstawie wzoru (1.80)



Rys. 1.19. Wyznaczenie chwili czasu t_0.

Widmowa charakterystyka członu dynamicznego z nieminimalnofazowym zerem (1.5) dana jest wzorem

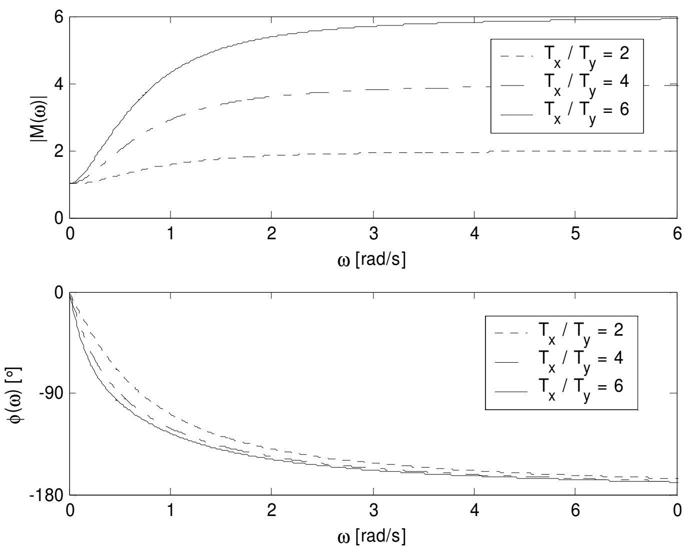
$$G(s)\Big|_{s=j\omega} = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \sqrt{\frac{1-\omega^2 T_x^2}{1+\omega^2 T_y^2}}e^{-j(\arctan \omega T_x + \arctan \omega T_y)} \tag{1.82}$$

zatem

$$M(0) = 1 \tag{1.83}$$

$$M(\infty) = \frac{T_x}{T_y} \tag{1.84}$$

Przykładowe przebiegi charakterystyki amplitudowej $M(\omega)$ oraz fazowej $\phi(\omega)$ tego członu dla różnych wartości T_x / T_y pokazano na Rys. 1.20.



Rys. 1.20. Charakterystyki częstotliwościowe członu z nieminimalnofazowym zerem.

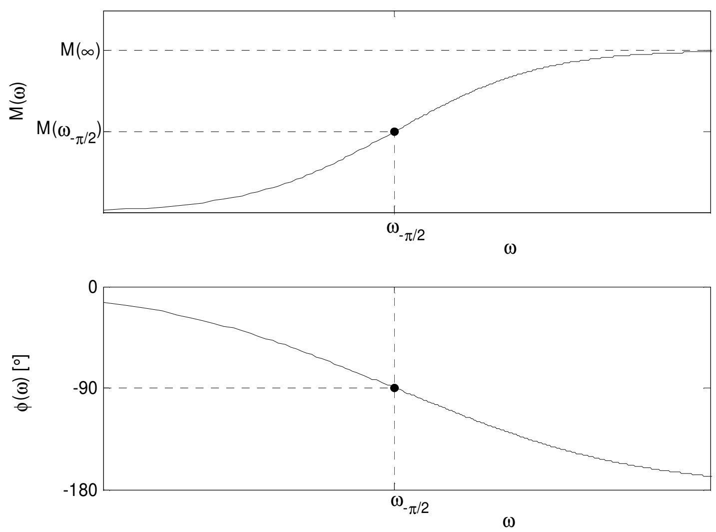
Aby dokonać identyfikacji stałych czasowych T_x oraz T_y w oparciu o charakterystyki widmowe, w pierwszej kolejności należy wyznaczyć pulsację $\omega_{-\pi/2}$, dla której $\varphi(\omega_{-\pi/2}) = -\frac{\pi}{2}$ (Rys. 1.21). Wykorzystując wzór (1.82) można pokazać, że dla pulsacji $\omega_{-\pi/2}$ charakterystyka amplitudowa ma następującą wartość

$$M(\omega_{-\pi/2}) = \sqrt{\frac{T_x}{T_y}} = \sqrt{M(\infty)} \tag{1.85}$$

Z powyższego faktu wynika, że pulsację $\omega_{-\pi/2}$ można wyznaczyć także w oparciu o charakterystykę $M(\omega)$. Dodatkowo ze wzoru (4.8) oraz (4.11) można wyprowadzić zależność

$$T_x = \frac{\sqrt{M(\infty)}}{\omega_{-\pi/2}} \tag{1.86}$$

Stałą czasową T_y wyznacza się w oparciu o wzór (4.10).



Rys. 1.21. Wyznaczenie pulsacji $\omega_{-\pi/2}$.

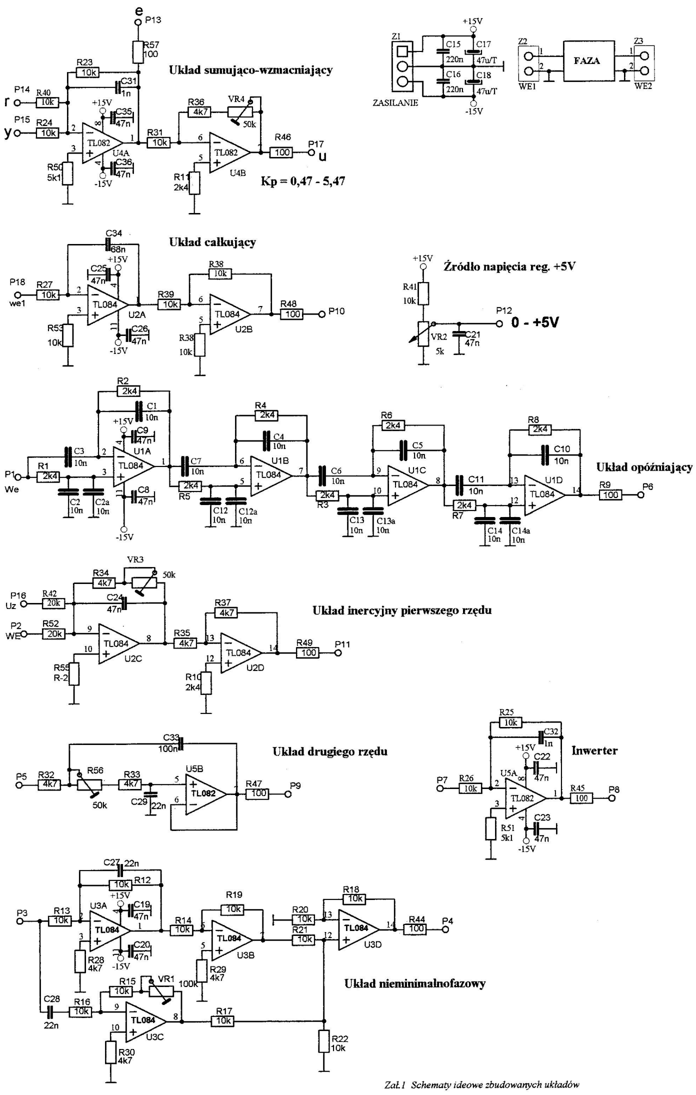
1.3 Opis stanowiska laboratoryjnego

Stanowisko laboratoryjne tworzą:

1. Zestaw Analogowych Modeli Procesów Przemysłowych (ZAMPP)

   Zawiera on w sobie obiekty dynamiczne opisane transmitancjami (1.1)-(1.5) oraz miernik przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego. Widok płyty czołowej układu ZAMPP przedstawiono na rys.1.22. Z kolei Rys. 1.23 prezentuje schematy ideowe identyfikowanych układów.

Rys. 1.22. Widok zestawu laboratoryjnego.



Rys. 1.23. Schematy ideowe badanych układów.

2. Wielofunkcyjny Zestaw Pomiarowy typu MS-9140
   Przyrząd ten zawiera między innymi:
   - generator funkcji, stanowiący źródło wejściowych sygnałów periodycznych podawanych na wejście modelu układu,
   - częstościomierz, umożliwiający odczyt częstotliwości sygnałów wejściowych.

3. Oscyloskop dwukanałowy.
   Umożliwia wizualizację sygnałów wejściowego i wyjściowego oraz pomiar ich amplitud i parametrów czasowych.
   Na Rys. 1.24. przedstawiono widok stanowiska pomiarowego.

Rys. 1.24. Widok stanowiska pomiarowego.

1.4 Zadania pomiarowe

a) należy pomierzyć charakterystykę amplitudową oraz fazową badanych obiektów;
b) w oparciu o charakterystyki czasowe należy oszacować wskaźniki odpowiedzi skokowej badanych obiektów

Uwagi:

- **postać sygnałów wejściowych, to znaczy ich amplitudy oraz pulsacje, należy dobierać w ten sposób, aby spełnione były warunki umożliwiające racjonalną identyfikację badanego układu, co sprowadza się przede wszystkim do postulatu stosowania pobudzeń, przy których układ laboratoryjny pracuje w zakresie liniowym;**

- **przy pomiarze charakterystyk amplitudowo-fazowych zanotować charakterystyczne punkty odpowiednio dla każdego układu (np. dla układu inercyjnego pierwszego rzędu – pulsację trzydecybelową, przesunięcie fazowe dla pulsacji trzydecybelowej oraz wzmocnienie w stanie ustalonym);**
- **pomiary przeprowadzać w zakresie dolnych częstotliwości;**
- **przy pomiarze charakterystyk czasowych należy oszacować wskaźniki odpowiedzi skokowej (nie mierzyć czasu ustalania T_s !!!).**
- **odpowiednie formuły służące identyfikacji parametrów poszczególnych układów można znaleźć w poprzednich punktach owego rozdziału. Przykładowo dla układu inercyjnego pierwszego rzędu z członem opóźniającym można posłużyć się formułami (1.5)-(1.7).**

1.5 Opracowanie wyników

W sprawozdaniu z ćwiczenia należy:
- zamieścić wykresy charakterystyk Bodego oraz Nyquista badanych obiektów;
- przedstawić zidentyfikowane modele tych układów;
- przeprowadzić dyskusję wyników (porównanie różnych metod identyfikacji);
- wyznaczyć modele optymalne w sensie odpowiednich nieliniowych zadań najmniejszych kwadratów. W tym celu stosuje się MATLABową funkcję **fmins**, która rozwiązuje odpowiednie zadanie optymalizacji.

1.6 Oprogramowanie wspomagające przetwarzanie danych pomiarowych

MATLABowa funkcja **fmins** pozwala na optymalizację parametrów modeli (1.1)-(1.5) na podstawie zbioru dostępnych danych pomiarowych $\{U_{out}(\omega_j), \Phi_m(\omega_j)\}_{j=1}^{n}$ oraz U_{in}, gdzie $U_{out}(\omega_j)$ jest amplitudą wyjściowego sygnału harmonicznego, $\Phi_m(\omega_j)$ jest przesunięciem fazy tego sygnału w stosunku do fazy wejściowego sygnału harmonicznego o amplitudzie U_{in} i pulsacji ω_j, $j = 1, \ldots, n$. Rozwiązywane zadanie optymalizacji ma postać następującego problemu z kwadratową funkcją kosztów

$$(T_i^*, T_0^*) = \underset{(T_i, T_0)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} [\operatorname{Re} H(\omega_j, k, T_0, T_i) - U_{out}(\omega_j)/U_{in} \cdot \cos\Phi_m(\omega_j)]^2 + \\ [\operatorname{Im} H(\omega_j, k, T_0, T_i) - U_{out}(\omega_j)/U_{in} \cdot \sin\Phi_m(\omega_j)]^2 \end{bmatrix} \right\}^{1/2} \tag{1.87}$$

Funkcję **fmins** można wywołać z wiersza poleceń MATLABa w następujący sposób:

>> **x** = **fmins**('FunOpt',**x0**)

gdzie FunOpt oznacza nazwę funkcji kryterialnej według której poszukiwany jest optymalny wektor parametrów **x**, zaś **x0** jest punktem startowym procedury optymalizacyjnej.

Do optymalizacji parametrów identyfikowanych modeli należy użyć następujących funkcji kryterialnych dla modelu:

- **funm1** – dla modelu inercyjnego pierwszego rzędu oraz dla układu całkującego w pętli sprzężenia jednostkowego opisanych odpowiednio transmitancjami (1.1) i (1.3);
- **funm1t** – dla modelu pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym opisanego transmitancją (1.2)

- **funm2** – dla modelu pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym opisanego transmitancją (1.4)
- **funmnf** – dla modelu nieminimalnofazowego opisanego transmitancją (1.4)

Ponadto należy zdefiniować w MATLABie dane pomiarowe w postaci macierzy o następującej strukturze:

DATA_M=[freq Uout Phase]

gdzie **freq** oznacza kolumnę częstoliwości - [Hz], **Uout** jest kolumną zawierającą amplitudą sygnału wyjściowego - [V] (przy założeniu, że amplituda napięcia wejściowego wynosi 1V) oraz **Phase** reprezentuje kolumnę przesunięcia fazowego - [^{o}]. Następnie należy zdefiniować zmienną **DATA_M** jaką zmienną globalną poprzez polecenie:

>> **global DATA_M**

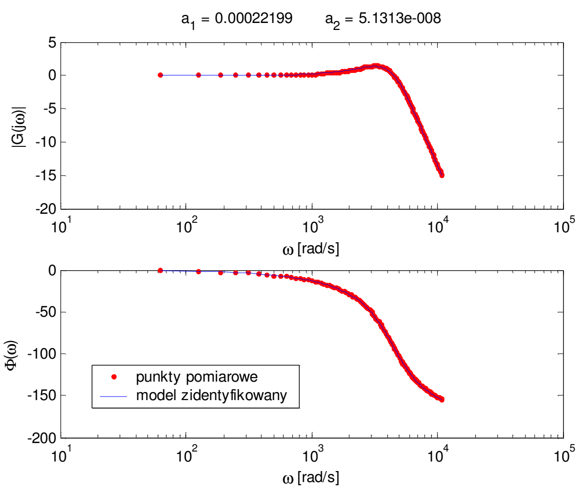
Dla celów graficznej wizualizacji stopienia dopasowania identyfikowanych modeli stworzono dodatkowe m-pliki:

- **gvidm1** – dla modelu inercyjnego pierwszego rzędu oraz dla układu całkującego w pętli sprzężenia jednostkowego opisanych odpowiednio transmitancjami (1.1) i (1.3);
- **gvidm1t** – dla modelu pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym opisanego transmitancją (1.2)
- **gvidm2** – dla modelu pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym opisanego transmitancją (1.4)
- **gvidmnf** – dla modelu nieminimalnofazowego opisanego transmitancją (1.4)

Powyższe funkcje można wywołać z wiersza poleceń MATLABa w następujący sposób:

>> **gvidm1** (**x**)
>> **gvidm1t** (**x**)
>> **gvidm2** (**x**)
>> **gvidmnf** (**x**)

gdzie **x** oznacza znaleziony optymalny wektor parametrów. Przykładowa charakterystyka Bodego, uzyskana za pomocą omawianych MATLABowych funkcji, przedstawiono na rys. 1.25.



Rys. 1.24. Przykładowa charakterystyka częstotliwościowa modelu drugiego rzędu.