

ĆWICZENIE 3

Stabilizacja i korekcja liniowych układów regulacji

3.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zilustrowanie możliwości korekcji układu regulacji (sterowania) przy użyciu sterowników z rodziny *PID*. Badania, w swoim podstawowym zakresie, dotyczą stanu ustalonego oraz stanów przejściowych w układach sterowania obiektami całkująco-inercyjnymi (przypadek a) oraz dwuinercyjnymi (przypadek b). Modele te odwzorowują zatem dwie istotne klasy obiektów spotykanych w wielu przemysłowych dziedzinach.

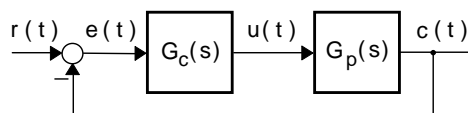
Ponadto bada się zastosowanie w układzie sterowania pomocniczego statycznego sprzężenia korekcyjnego, obejmującego fragment sterowanego obiektu.

Rozważane są proste reguły strojenia sterowników *PID*, pozwalające jednak na zapewnienie układowi zamkniętemu założonych projektowych wymagań, wyznaczonych specyfikacjami dotyczącymi stabilności, dokładności oraz szybkości sterowania.

Uzupełniającym celem ćwiczenia jest badanie prostych metod identyfikacji sterowanych obiektów dynamicznych na podstawie pomierzonych parametrów częstotliwościowych oraz czasowych charakterystyk odpowiednich zamkniętych układów sterowania, w których użyto proporcjonalnego sterownika o znanym wzmacnieniu. Metody te oparto o analityczne formuły opisujące własności członów dynamicznych drugiego rzędu (por. Ćwiczenie 2).

3.1.1 Model zamkniętego układu sterowania

Schemat strukturalny badanego układu sterowania pokazano na rys. 3.1. Na schemacie tym $G_p(s)$ oznacza operatorową transmitancję sterowanego obiektu dynamicznego, zaś $G_c(s)$ jest transmitancją sterownika.



Rys. 3.1. Strukturalny schemat układu sterowania

Sygnał $c(t)$ jest zmienną sterowaną (wyjście obiektu), sygnał $r(t)$ jest sygnałem wielkości zadającej, zaś $u(t)$ jest sygnałem sterującym (wyjście sterownika).

3.1.2 Modele sterowanego obiektu

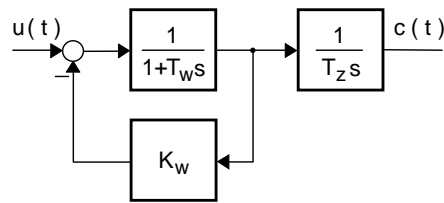
Rozważa się dwa modele sterowanego obiektu w postaci następujących członów drugiego rzędu: model obiektu całkująco-inercyjnego oraz model obiektu dwuinercyjnego.

Przypadek a: obiekt całkująco-inercyjny

W przypadku, gdy sterowany obiekt ma charakter całkująco-inercyjny, zachodzi:

$$G_p(s) = \frac{k_p}{s(1 + T_p s)}. \quad (3.1)$$

Transmitancja ta odpowiada strukturalnemu schematowi pokazanemu na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Strukturalny schemat obiektu całkująco-inercyjnego

Na schemacie tym wyróżniono człon inercyjny o transmitancji $1/(1+T_w s)$ objęty korekcyjnym statycznym sprzężeniem zwrotnym o współczynniku k_w oraz człon całkujący o transmitancji $1/(T_z s)$. Z powyższych założeń wynika, iż:

$$k_p = 1/[T_z(1+k_w)], \quad (3.2)$$

$$T_p = T_w/(1+k_w). \quad (3.3)$$

Możliwość doboru wartości współczynnika k_w należy tu traktować jako uzupełniający element (dodatki stopień swobody) procedury projektowania układu sterowania. Układ, w którym w celu kształtowania częstotliwościowych charakterystyk transmitancji głównego toru sterowania obok szeregowego sterownika $G_c(s)$ wykorzystuje się omawiane korekcyjne statyczne sprzężenie zwrotne, obejmujące pewien fragment sterowanego obiektu, nazywa się niekiedy układem regulacji kaskadowej. Jak łatwo zauważyć, po zastosowaniu takiego sprzężenia, przy $k_w > 0$, uzyskuje się korzystne zmniejszenie stałej czasowej wypadkowego członu inercyjnego: $T_p < T_w$. Warto jednak pamiętać, iż odpowiedniemu zmniejszeniu ulega także wzmożenie rozważanego członu inercyjnego (zachodzi bowiem $[1/(1+k_w)] < 1$).

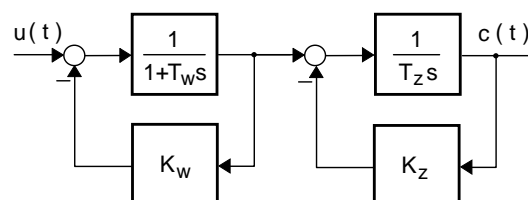
Przystępując do projektowania sterownika należy zatem zidentyfikować dwa parametry schematu z rys. 3.2: stałe czasowe T_w oraz T_z .

Przypadek b: obiekt dwuinercyjny

Transmitancja obiektu ma w tym przypadku postać

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(1+T_{p1}s)(1+T_{p2}s)}. \quad (3.4)$$

Odpowiedni strukturalny schemat przedstawiono na rys. 3.3.



Rys. 3.3. Strukturalny schemat obiektu dwuinercyjnego

Na schemacie tym, obok poprzednio opisanego sprzężenia o współczynniku k_w , występuje statyczne sprzężenie o współczynniku k_z , obejmujące człon całkujący. W rozważanym przypadku zachodzi zatem:

$$k_p = 1/[k_z(1 + k_w)], \quad (3.5)$$

$$T_{p1} = T_w/(1 + k_w), \quad (3.6)$$

$$T_{p2} = T_z/k_z. \quad (3.7)$$

Projektując układ sterowania, tylko pierwsze z wymienionych sprzężeń należy traktować jako nastawialny element (stopień swobody) kaskadowej struktury układu sterowania. Wartość współczynnika k_z powinna być w zasadzie postrzegana jako wielkość 'nieznana'. W takim przypadku, przystępując do syntezy sterownika, należałoby dokonać identyfikacji parametrów k'_p , T_w oraz T_{p2} następującego dwuinercyjnego członu

$$G'_p(s) = \frac{k'_p}{(1 + T_w s)(1 + T_{p2} s)}. \quad (3.8)$$

Dla uproszczenia czynności pomiarowych, dopuszcza się jednak wykorzystanie poprzednio zidentyfikowanych parametrów T_w oraz T_z modelu obiektu (przypadek a). W tym celu, przyjmując k_z jako wartość znaną, oblicza się stałą czasową T_{p2} , korzystając ze wzoru (3.7), zaś 'brakujący' parametr k'_p modelu (3.8) wyznacza się jako

$$k'_p = 1/k_z, \quad (3.9)$$

Zgodnie ze wzorami (3.5) oraz (3.9) zachodzi przeto

$$k_p = k'_p/(1 + k_w). \quad (3.10)$$

3.1.3 Sterowniki

W ćwiczeniu badane są układy ze sterownikami typu proporcjonalnego P , proporcjonalno-całkującego PI , proporcjonalno-różniczkującego PD oraz proporcjonalno-całkująco-różniczkującego PID . Operatorowe transmitancje takich sterowników mają postać:

$$P: \quad G_c(s) = k_c, \quad (3.11)$$

$$PI: \quad G_c(s) = k_c[1 + 1/(T_i s)], \quad (3.12)$$

$$PD: \quad G_c(s) = k_c(1 + T_d s), \quad (3.13)$$

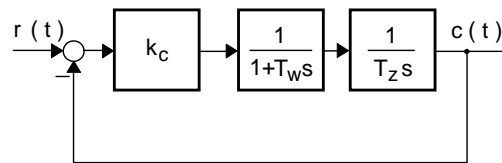
$$PID: \quad G_c(s) = k_c[1 + 1/(T_i s) + T_d s]. \quad (3.14)$$

W przypadku sterowników realizujących działanie różniczkujące (PD oraz PID) przyjęto zatem idealizowaną reprezentację odpowiednich członów.

3.1.4 Uwagi dotyczące identyfikacji modeli sterowanych obiektów

Podstawową identyfikację stałych czasowych T_w oraz T_z modeli sterowanych obiektów przeprowadza się, korzystając z wybranych metod identyfikacji członu dynamicznego drugiego

rzędu, opisanych w Ćwiczeniu 2 (zob. Tabela 2.1). W tym celu zestawia się układ zamknięty ze sterownikiem typu P o założonym wzmacnieniu k_c (rys. 3.4).



Rys. 3.4 Schemat strukturalny układ sterowania, w którym dokonuje się identyfikacji modelu sterowanego obiektu

Operatorowa transmitancja rozważanego układu dana jest wzorem

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.15)$$

w którym

$$\zeta = \sqrt{T_z / (k_c T_w)} / 2, \quad (3.16)$$

$$\tau = \sqrt{T_w T_z / k_c}. \quad (3.17)$$

Po identyfikacji pary parametrów (ζ, τ) tej transmitancji, odpowiadającej zastosowanemu wzmacnieniu $k_c > 0$ sterownika P , wyznacza się wartości stałych czasowych (T_w, T_z) modelu sterowanego obiektu:

$$T_w = \tau / (2\zeta), \quad (3.18)$$

$$T_z = 2\zeta k_c \tau. \quad (3.19)$$

Postać sygnałów wejściowych oddziałujących na badany układ sterowania (rys. 3.4), to znaczy amplitudy oraz pulsacje tych sygnałów, należy dobierać w ten sposób, aby spełnione były warunki umożliwiające racjonalną identyfikację badanego modelu. Należy przede wszystkim zadbać o stosowanie pobudzeń, przy których dla wybranego wzmacnienia k_c sterownika P układ laboratoryjny pracuje w zakresie liniowym.

3.2.1 Sterowanie obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika P

Strukturalny schemat rozważanego układu sterowania pokazano na rys. 3.1 oraz 3.2, przy czym transmitancja $G_p(s)$ jest modelem obiektu całkująco-inercyjnego, określonym wzorami (3.1)-(3.3), zaś $G_c(s)$ oznacza transmitancję sterownika typu P , daną wzorem (3.11). Zgodnie z tymi wzorami zachodzi:

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c k_p}{k_c k_p + s + T_p s^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.20)$$

$$G_{re}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(1 + T_p s)}{k_c k_p + s + T_p s^2} = \frac{1}{k_c k_p} \cdot \frac{s(1 + T_p s)}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.21)$$

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{k_c s(1 + T_p s)}{k_c k_p + s + T_p s^2} = \frac{1}{k_p} \cdot \frac{s(1 + T_p s)}{1 + 2\zeta \tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\zeta = 1 / (2\sqrt{k_c k_p T_p}), \quad (3.23)$$

$$\tau = \sqrt{T_p / (k_c k_p)}. \quad (3.24)$$

Racjonalny dobór wzmocnienia k_c sterownika powinien przede wszystkim uwzględniać wymagania, dotyczące zapasu stabilności rozważanego układu sterowania. Bezpośrednią miarą zapasu stabilności jest w rozważanym przypadku zapas (margines) fazy Δ_p , jako miary pośrednie wymienić można wskaźnik oscylacyjności M_r oraz przeregulowanie κ odpowiedzi skokowej układu zamkniętego. Każdej z wymienionych miar jednoznacznie przyporządkować można odpowiednią wartość współczynnika tłumienia:

$$\zeta = \tan \Delta_p (\cos \Delta_p)^{1/2} / 2, \quad \Delta_p > 0 \quad (3.25)$$

$$\zeta = [1/2 - (1 - M_r^{-2})^{1/2} / 2]^{1/2}, \quad M_r \geq 1. \quad (3.26)$$

$$\zeta = |\ln \kappa| (\pi^2 + \ln^2 \kappa)^{-1/2}, \quad \kappa > 0. \quad (3.27)$$

Poszukiwane wzmocnienie k_c sterownika wynosi zatem

$$k_c = \frac{1}{4\zeta^2 k_p T_p} = \frac{(1 + k_w)^2}{4\zeta^2} \cdot \frac{T_z}{T_w}, \quad (3.28)$$

gdzie $k_w \geq 0$ jest współczynnikiem kaskadowego sprzężenia, stosowanego w projektowanym układzie. Szybkość przejściowych procesów sterowania w układzie o tak nastawionym sterowniku, mierzona przykładowo wartością czasów ustalania skokowej odpowiedzi układu zamkniętego $T_{s\Delta}$, jest szybkością wynikową. Zachodzi przy tym $T_{s\Delta} \sim \tau / \zeta$, przykładowo: $T_{s2\%} \cong 4\tau / \zeta$ oraz $T_{s5\%} \cong 3\tau / \zeta$. W rozważanym przypadku iloraz τ / ζ przyjmuje wartość

$$\tau / \zeta = 2T_w / (1 + k_w). \quad (3.29)$$

Na tej podstawie wnioskuje się, iż przyspieszenie procesów sterowania uzyskać można poprzez zwiększenie współczynnika kaskadowego sprzężenia k_w . Przy ustalonej wartości ζ prowadzi to do odpowiedniego zwiększenia wzmocnienia k_c sterownika (wzór (3.28)), a tym samym do postulatu rozszerzenia zakresu dopuszczalnych wartości sygnału sterującego $u(t)$. Przykładowo, początkowa wartość $u(0)$ tego sygnału przy jednostkowym skokowym sygnale zadającym $r(t)$ wynosi $u(0) = k_c$. W praktyce oznacza to, iż ograniczenia nałożone na wartość sygnału sterującego limitują szybkość sterowania, możliwą do uzyskania w danym układzie. Uwzględnienie omawianych ograniczeń jest oczywiście niezbędne także przy wykonywaniu niniejszego ćwiczenia.

3.2.2 Sterowanie obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika PI

Strukturalny schemat rozważanego układu sterowania pokazano na rys. 3.1 oraz 3.2, przy czym transmitancja $G_p(s)$ jest modelem obiektu całkująco-inercyjnego, określonym wzorami (3.1)-(3.3), zaś $G_c(s)$ oznacza transmitancję sterownika typu PI, daną wzorem (3.12).

Zachodzi zatem:

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c k_p (1 + T_i s)}{k_c k_p + k_c k_p T_i s + T_i s^2 + T_i T_p s^3}, \quad (3.30)$$

$$G_{re}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 T_i (1 + T_p s)}{k_c k_p + k_c k_p T_i s + T_i s^2 + T_i T_p s^3}, \quad (3.31)$$

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{s k_c (1 + T_i s)(1 + T_p s)}{k_c k_p + k_c k_p T_i s + T_i s^2 + T_i T_p s^3}. \quad (3.32)$$

W przypadku, w którym wszystkie parametry k_p , k_c , T_i oraz T_p mają dodatnie wartości, wystarczający warunek stabilności zamkniętego układu sterowania przyjmuje postać ostrej nierówności $T_i > T_p$. Rozważany stabilny układ sterowania jest układem astatycznym drugiego rzędu - dobierając wartość stałej całkowania T_i sterownika PI nie można zatem opierać się na zasadzie bezpośredniej kompensacji ujemnego bieguna transmitancji obiektu poprzez odpowiednie zero transmitancji tego sterownika (taka reguła nastawiania sterownika PI wymagałaby bowiem, aby $T_i = T_p$). Przyjmując oznaczenie

$$T_i = \alpha T_p, \quad \alpha > 1, \quad (3.33)$$

argument widmowej transmitancji $G_0(j\omega) = G_c(j\omega)G_p(j\omega)$ układu otwartego wyrazić można wzorem

$$\arg G_0(j\omega) = -180^\circ + \arctan \frac{\omega T_p (\alpha - 1)}{1 + \alpha \omega^2 T_p^2}. \quad (3.34)$$

Niech ω_{\max} będzie taką pulsacją ω , dla której $\arg G_0(j\omega)$ osiąga maksymalną wartość. Jak łatwo sprawdzić, obowiązują następujące relacje

$$\omega_{\max} = \omega_{\max}(\alpha) = 1 / (T_p \sqrt{\alpha}), \quad (3.35)$$

$$\arg G_0(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_{\max}(\alpha)} = -180^\circ + \arctan \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (3.36)$$

Ustalonej wartości parametru α odpowiada, zgodnie ze wzorem (3.33), stała całkowania T_i sterownika PI . Wzmocnienie $k_c = k_c(\alpha)$ tego sterownika dobrać można w taki sposób, aby pulsacja $\omega_{\max}(\alpha)$ równała się pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki układu otwartego ω_{gc}

$$\omega_{\max}(\alpha) = \omega_{gc}. \quad (3.37)$$

Z definicji pulsacji $\omega_{\max}(\alpha)$ wynika, iż dla danego α uzyskuje się w ten sposób maksymalny zapas fazy Δ_p rozważanego układu sterowania

$$\Delta_p = \Delta_p(\alpha) = \arctan \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (3.38)$$

Ponieważ dla pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki układu otwartego ω_{gc} zachodzi

$$|G_0(j\omega_{gc})| = 1, \quad (3.39)$$

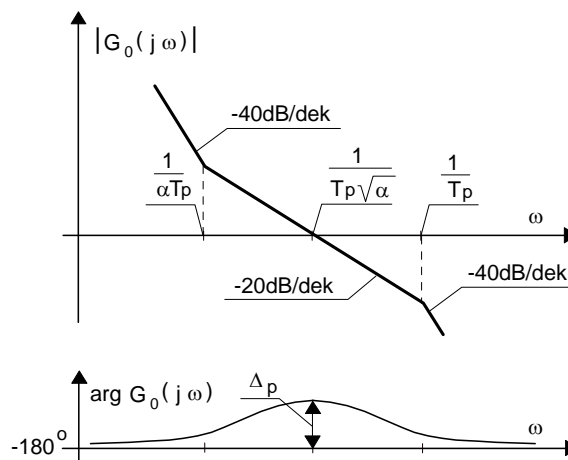
zatem wzmocnienie sterownika PI otrzymać można ze wzoru

$$k_c(\alpha) = 1 / (k_p T_p \sqrt{\alpha}). \quad (3.40)$$

Kiedy wartość zapasu fazy Δ_p jest narzucona, odpowiadającą jej wartość parametru $\alpha(\Delta_p)$ uzyskuje z zależności (3.38). Prowadzi to do odpowiedniego kwadratowego równania, którego rozwiązanie określa wzór

$$\alpha(\Delta_p) = 1 + 2 \tan^2 \Delta_p + [(1 + 2 \tan^2 \Delta_p)^2 - 1]^{1/2}. \quad (3.41)$$

Asymptotyczne charakterystyki Bodego tak zaprojektowanego otwartego układu sterowania przedstawiono na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Charakterystyki Bodego otwartego układu sterowania

Zakładając, iż wartości nastaw sterownika PI przyjęto zgodnie z formułami $k_c(\alpha)$ oraz $T_i = \alpha T_p$, gdzie $\alpha > 1$ jest swobodnym projektowym parametrem, transmitancję $G_{rc}(p)$ rozważanego zamkniętego układu sterowania dla unormowanego argumentu $p = s T_p$ wyrazić można wzorem

$$G_{rc}(p) = \frac{1 + \alpha p}{1 + \alpha p + \alpha \sqrt{\alpha} p^2 + \alpha \sqrt{\alpha} p^3}. \quad (3.42)$$

Własności układu modelowanego taką wzorcową (prototypową) transmitancją trzeciego rzędu (dla wybranych wartości zapasu fazy Δ_p) opisują dane z tabeli 3.1.

Przy ustalonej wartości parametru $\alpha > 1$ procesy sterowania można przyspieszyć odpowiednio zmniejszając wartość stałej czasowej T_p . Zgodnie ze wzorem (3.3) efekt taki osiąga się poprzez zwiększenie współczynnika korekcyjnego (kaskadowego) sprzężenia k_w . Tak postępując, należy wszakże mieć na uwadze ewentualne praktyczne ograniczenia na maksymalną dopuszczalną wartość sygnału sterującego $u(t)$. Przykładowo, początkowa wartość $u(0)$ tego sygnału przy jednostkowym skokowym sygnale zadającym $r(t)$ wynosi

$$u(0) = k_c = \frac{(1 + k_w)^2}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{T_z}{T_w}. \quad (3.43)$$

zapas fazy Δ_p	30°	40°	50°	60°	70°
parametr α	3.0000	4.5989	7.5486	13.9282	32.1634
przeregulowanie $\kappa_{\%}$ [%]	52.48	39.50	28.07	18.79	12.03
czas maksimum T_k [T_p]	5.041	6.188	8.091	12.058	22.195
czas ustalania $T_{s2\%}$ [T_p]	19.010	17.467	19.621	36.100	73.860
czas ustalania $T_{s5\%}$ [T_p]	13.525	11.311	16.960	28.007	50.649
pulsacja odcięcia ω_{gc} [rad/ T_p]	0.577	0.466	0.364	0.268	0.176
wskaźnik oscylacyjności M_r	2.008	1.577	1.347	1.217	1.132
rezonansowa pulsacja ω_r [rad/ T_p]	0.519	0.368	0.229	0.125	0.056

Tabela 3.1. Własności wzorcowego układu trzeciego rzędu

Podobnie jak w poprzednio rozważanym przypadku układu sterowania ze sterownikiem typu P (punkt 3.2.1), oznacza to, iż ograniczenia nałożone na sygnał sterujący mogą w istotnym stopniu wyznaczać szybkość procesów przejściowych, możliwą do uzyskania w danym układzie sterowania.

W przypadku, gdy wymagania, odnoszące się do zapasu stabilności oraz szybkości sterowania, wyrażono za pomocą pary wskaźników (Δ_p, ω_{gc}) , gdzie Δ_p jest zapasem fazy projektowanego układu, zaś ω_{gc} oznacza pulsację odcięcia amplitudowej charakterystyki transmitancji układu otwartego $G_c(s)G_p(s)$, zastosowanie znajdują następujące formuły:

$$k_c = \cos \vartheta_{PI} / |G_p(j\omega_{gc})|, \quad (3.44)$$

$$T_i = -1 / (\omega_{gc} \tan \vartheta_{PI}), \quad (3.45)$$

przy czym kąt ϑ_{PI} , zdefiniowany worem

$$\vartheta_{PI} = \arg G_c(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ, \quad (3.46)$$

spełniać musi następujący warunek

$$-90^\circ \leq \vartheta_{PI} \leq 0^\circ. \quad (3.47)$$

Gdy projektowe wymaganie dotyczy tylko zapasu fazy, kąt ϑ_{PI} traktować można jako parametr procedury wyznaczania nastaw k_c oraz T_i . Pulsację odcięcia ω_{gc} otrzymuje się wówczas z równania $\arg G_p(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \vartheta_{PI} - 180^\circ$.

3.2.3 Sterowanie obiektem dwuinercyjnym przy pomocy sterownika PI

Strukturalny schemat rozważanego na wstępie układu sterowania pokazano na rys. 3.1, przy czym transmitancja $G_p(s)$ jest modelem obiektu dwuinercyjnego, określonego ogólnym wzorem (3.4), zaś $G_c(s)$ oznacza transmitancję sterownika typu PI, daną wzorem (3.12).

Odpowiednie transmitancje mają w tym przypadku postać:

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c k_p (1 + T_i s)}{k_c k_p + (1 + k_c k_p) T_i s + T_i (T_{p1} + T_{p2}) s^2 + T_i T_{p1} T_{p2} s^3}, \quad (3.48)$$

$$G_{re}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s T_i (1 + T_{p1} s) (1 + T_{p2} s)}{k_c k_p + (1 + k_c k_p) T_i s + T_i (T_{p1} + T_{p2}) s^2 + T_i T_{p1} T_{p2} s^3}, \quad (3.49)$$

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{k_c (1 + T_i s) (1 + T_{p1} s) (1 + T_{p2} s)}{k_c k_p + (1 + k_c k_p) T_i s + T_i (T_{p1} + T_{p2}) s^2 + T_i T_{p1} T_{p2} s^3}. \quad (3.50)$$

Niech, przykładowo, $T_{p1} \geq T_{p2}$. Zgodnie z prostą kompensacyjną regułą nastawiania sterownika PI, dopuszczalną w rozważanym przypadku układu sterowania o astatyzmie rzędu pierwszego, należy rozpatrzyć dwie możliwości doboru stałej całkowania: $T_i = T_{p1}$ oraz $T_i = T_{p2}$. Obie decyzje prowadzą do układu zamkniętego o transmitancji $G_{rc}(s)$ drugiego rzędu (3.15), przy czym:

$$\tau = \sqrt{T_{p1} T_{p2} / (k_c k_p)}, \quad (3.51)$$

$T_i = T_{p1}$:

$$\zeta = \sqrt{T_{p1} / (k_c k_p T_{p2})} / 2, \quad (3.52)$$

$$k_c = u(0) = T_{p1} / (4\zeta^2 k_p T_{p2}), \quad (3.53)$$

$$\tau / \zeta = 2T_{p2}; \quad (3.54)$$

$T_i = T_{p2}$:

$$\zeta = \sqrt{T_{p2} / (k_c k_p T_{p1})} / 2, \quad (3.55)$$

$$k_c = u(0) = T_{p2} / (4\zeta^2 k_p T_{p1}), \quad (3.56)$$

$$\tau / \zeta = 2T_{p1}. \quad (3.57)$$

Z wzorów tych wynika, iż dla ustalonej wartości współczynnika tłumienia ζ , wyprowadzonej w oparciu o wymaganą miarę zapasu stabilności (to znaczy w oparciu o Δ_p , M_r lub κ), wybór między dwiema powyższymi możliwościami ma kompromisowy charakter: decydując o bezpośredniej kompensacji większej stałej czasowej obiektu ($T_i = T_{p1}$), kosztem zwiększenia wartości sygnałów sterujących zapewnia się układowi sterowania większą szybkość procesów przejściowych.

W przypadku układu sterowania obiektem dwuinercyjnym z kaskadowym sprzężeniem zwrotnym (por. wzory (3.4), (3.6), (3.8) oraz (3.10)) obowiązują następujące formuły, stanowiące podstawę prostych przepisów nastawiania sterowników PI:

$$\tau = \sqrt{T_w T_{p2} / (k_c k'_p)}, \quad (3.58)$$

$$T_i = T_{p1} :$$

$$\zeta = \sqrt{T_w / (k_c k'_p T_{p2})} / 2, \quad (3.59)$$

$$k_c = u(0) = T_w / (4\zeta^2 k'_p T_{p2}), \quad (3.60)$$

$$\tau / \zeta = 2T_{p2}; \quad (3.61)$$

$$T_i = T_{p2} :$$

$$\zeta = (1 + k_w) \sqrt{T_{p2} / (k_c k'_p T_w)} / 2, \quad (3.62)$$

$$k_c = u(0) = (1 + k_w)^2 T_{p2} / (4\zeta^2 k'_p T_w), \quad (3.63)$$

$$\tau / \zeta = 2T_w / (1 + k_w). \quad (3.64)$$

Ponadto, uwzględniając wzory (3.7) oraz (3.9), otrzymuje się

$$\tau = \sqrt{T_w T_z / k_c}, \quad (3.65)$$

$$T_i = T_{p1} :$$

$$\zeta = k_z \sqrt{T_w / (k_c T_z)} / 2, \quad (3.66)$$

$$k_c = u(0) = k_z^2 T_w / (4\zeta^2 T_z), \quad (3.67)$$

$$\tau / \zeta = 2T_z / k_z; \quad (3.68)$$

$$T_i = T_{p2} :$$

$$\zeta = (1 + k_w) \sqrt{T_z / (k_c T_w)} / 2, \quad (3.69)$$

$$k_c = u(0) = (1 + k_w)^2 T_z / (4\zeta^2 T_w). \quad (3.70)$$

W omawianym przypadku obiektu modelowanego członem dwuinercyjnym do nastawiania sterownika *PI* mogą być także wykorzystane wzory (3.44)-(3.47).

3.2.4 Sterowanie obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika *PD*

Strukturalny schemat badanego układu sterowania dany jest na rys. 3.1, gdzie transmitancja $G_p(s)$ jest modelem obiektu całkująco-inercyjnego (zob. wzory (3.1)-(3.3)), zaś $G_c(s)$ oznacza transmitancję sterownika typu *PD* daną wzorem (3.13). Odpowiednie transmitancje mają zatem postać:

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c k_p (1 + T_d s)}{k_c k_p + (1 + k_c k_p T_d) s + T_p s^2} = \frac{1 + \sigma \tau s}{1 + 2\zeta \tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.71)$$

$$G_{re}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(1 + T_p s)}{k_c k_p + (1 + k_c k_p T_d) s + T_p s^2}, \quad (3.72)$$

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{s k_c (1 + T_d s)(1 + T_p s)}{k_c k_p + (1 + k_c k_p T_d) s + T_p s^2}, \quad (3.73)$$

gdzie

$$\zeta = [1/(k_c k_p) + T_d] \sqrt{k_c k_p / T_p} / 2, \quad (3.74)$$

$$\sigma = T_d \sqrt{k_c k_p / T_p}, \quad (3.75)$$

$$\tau = \sqrt{T_p / (k_c k_p)}. \quad (3.76)$$

Transmitancja (3.71) dla $0 < \zeta < 1$ oraz $\sigma \neq 0$ reprezentuje człon oscylacyjny ze skończonym zerem. Odpowiedź skokowa takiego członu ma postać

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}[G(s)/s] = [1 + H_\sigma e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)] \cdot \mathbf{1}(t), = \\ &= \{1 - e^{-\zeta \omega_n t} [\cos \omega_0 t + (\zeta - \sigma)(1 - \zeta^2)^{-1/2} \sin \omega_0 t]\} \cdot \mathbf{1}(t), \end{aligned} \quad (3.77)$$

gdzie

$$H_\sigma = \begin{cases} -1 & \text{dla } \sigma = \zeta, \\ -1/\sin \alpha_\sigma & \text{dla } \sigma \neq \zeta, \end{cases} \quad (3.78)$$

$$\alpha_\sigma = \begin{cases} \pi/2 & \text{dla } \sigma = \zeta \\ \arctan[\omega_0 \tau / (\zeta - \sigma)] & \text{dla } \sigma \neq \zeta. \end{cases} \quad (3.79)$$

Wskaźniki T_k , κ oraz $\bar{T}_{s\Delta}$, opisujące odpowiedź skokową (3.77), dane są wzorami

$$T_k = \{\pi + \arctan[\sigma(1 - \zeta^2)^{1/2} / (\sigma\zeta - 1)]\} (1 - \zeta^2)^{-1/2} \cdot \tau, \quad (3.80)$$

$$\kappa = (1 - 2\sigma\zeta + \sigma^2)^{1/2} \cdot \exp(-\zeta T_k / \tau). \quad (3.81)$$

$$\bar{T}_{s\Delta} = \zeta^{-1} \ln \{[(1 - 2\sigma\zeta + \sigma^2) / (1 - \zeta^2)]^{1/2} / \Delta\} \cdot \tau. \quad (3.82)$$

Z kolei, wskaźniki M_r , ω_r oraz ω_{3dB} , związane z charakterystyką amplitudową członu (3.71), dane są wzorami

$$M_r = \begin{cases} 1/[2\zeta(1 - \zeta^2)^{1/2}] & \text{dla } \sigma = 0, \\ \sigma^2 \{[(1 + \sigma^2)^2 - 4\zeta^2 \sigma^2]^{1/2} - (1 + \sigma^2) + 2\zeta^2 \sigma^2\}^{-1/2} / \sqrt{2} & \text{dla } \sigma \neq 0, \end{cases} \quad (3.83)$$

$$\omega_r = \begin{cases} (1 - 2\zeta^2)^{1/2} / \tau & \text{dla } \sigma = 0, \\ \{[(1 + \sigma^2)^2 - 4\zeta^2 \sigma^2]^{1/2} - 1\}^{1/2} / (\sigma\tau) & \text{dla } \sigma \neq 0, \end{cases} \quad (3.84)$$

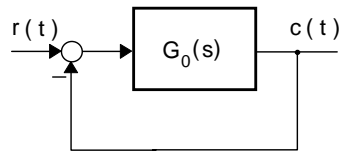
$$\omega_{3dB} = \{1 + \sigma^2 - 2\zeta^2 + [(1 + \sigma^2 - 2\zeta^2)^2 + 1]^{1/2}\}^{1/2} / \tau. \quad (3.85)$$

Człon (3.71) traktować można jako transmitancję zamkniętego układu sterowania o strukturze przedstawionej na rys. 3.6, przy czym

$$G_0(s) = \frac{k(1 + T_0 s)}{s(1 + T s)}, \quad (3.86)$$

zaś

$$k = 1/[(2\zeta - \sigma)\tau], \quad T = \tau / (2\zeta - \sigma) \quad \text{oraz} \quad T_0 = \tau\sigma. \quad (3.87)$$



Rys. 3.6. Schemat strukturalny układu sterowania

Pulsacja odcięcia ω_{gc} , zapas fazy Δ_p oraz współczynniki wzmocnienia prędkościowego k_v i przyspieszeniowego k_a tego układu dane są wzorami

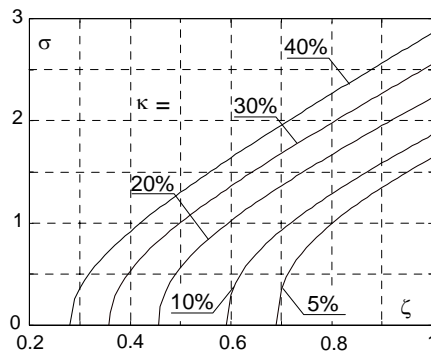
$$\omega_{gc} = \{2\zeta\sigma - 2\zeta^2 + [(2\zeta\sigma - 2\zeta^2)^2 + 1]^{1/2}\}^{1/2} / \tau, \quad (3.88)$$

$$\Delta_p = \arctan\{[\sigma\tau\omega_c + (2\zeta - \sigma) / (\tau\omega_{gc})] / [1 - (2\zeta - \sigma)\sigma]\}, \quad (3.89)$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = 1 / [\tau(2\zeta - \sigma)], \quad (3.90)$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sigma \neq 2\zeta, \\ \tau^{-2} & \text{dla } \sigma = 2\zeta. \end{cases} \quad (3.91)$$

Rozważane wskaźniki członu (3.71) zilustrowano na rys. 3.7-3.11. Krzywe dane na tych rysunkach opisano wartością przeregulowania κ odpowiedzi skokowej (3.77). Linie stałego przeregulowania $\kappa = \text{const}$ na płaszczyźnie parametrów (ζ, σ) pokazano na rys. 3.7.



Rys. 3.7. Linie stałego przeregulowania odpowiedzi skokowej członu oscylacyjnego ze skończonym zerem

W przypadku omawianego obiektu całkująco-inercyjnego (3.1) najprostszy sposób doboru stałej różniczkowania T_d sterownika PD polega na bezpośredniej kompensacji wpływu stałej czasowej T_p tego obiektu, co osiąga się przyjmując

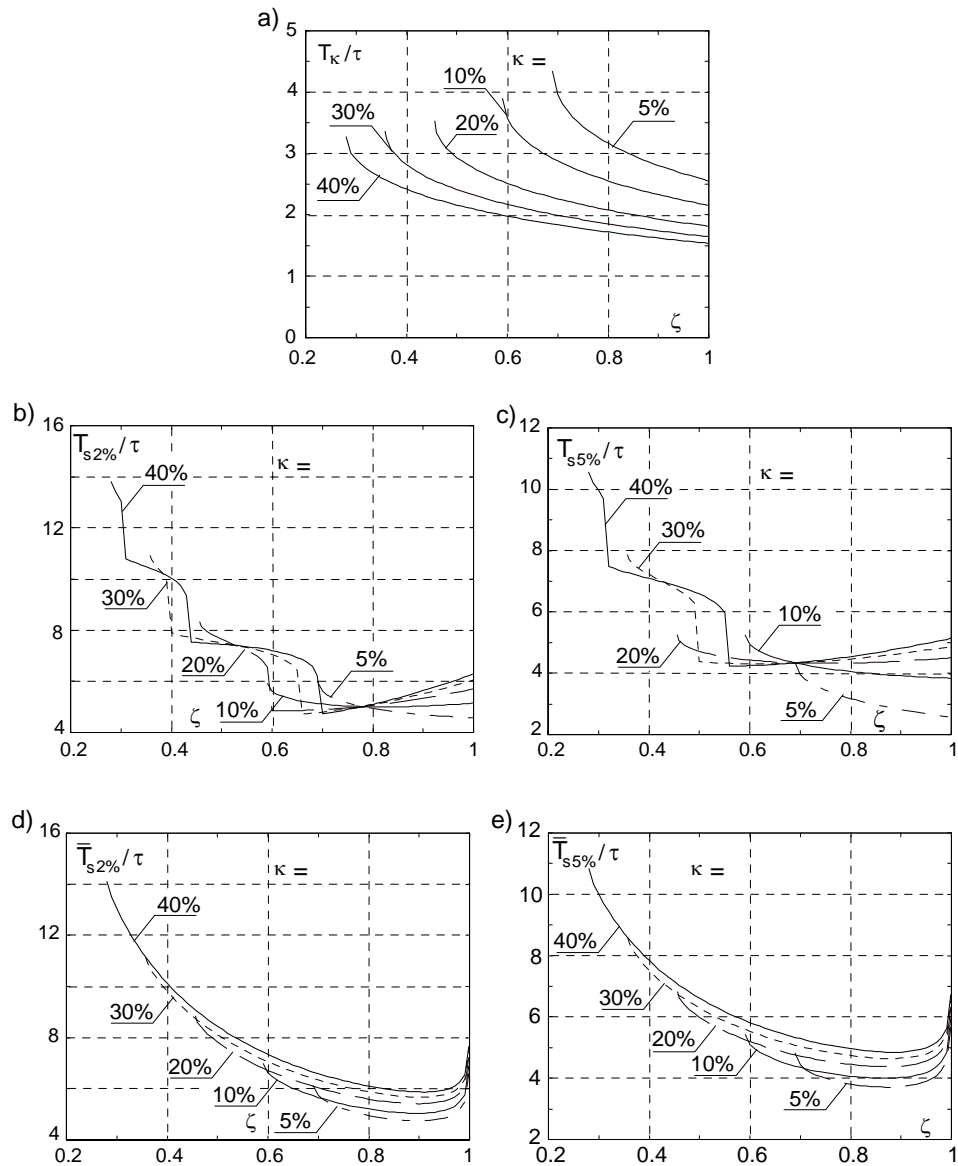
$$T_d = T_p. \quad (3.92)$$

Parametr k_c sterownika PD wyznacza się w oparciu o wymagane pasmo przenoszenia projektowanego układu

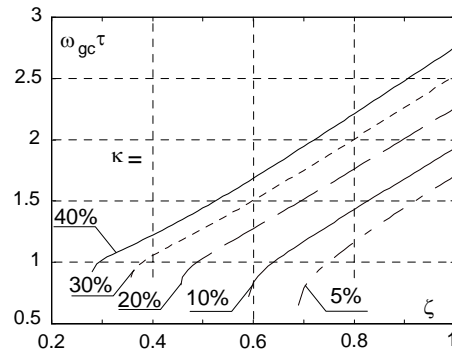
$$k_c = \omega_{3dB} / k_p. \quad (3.93)$$

Transmitancja $G_{rc}(s)$ takiego układu ma postać

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + s/(k_c k_p)}. \quad (3.94)$$

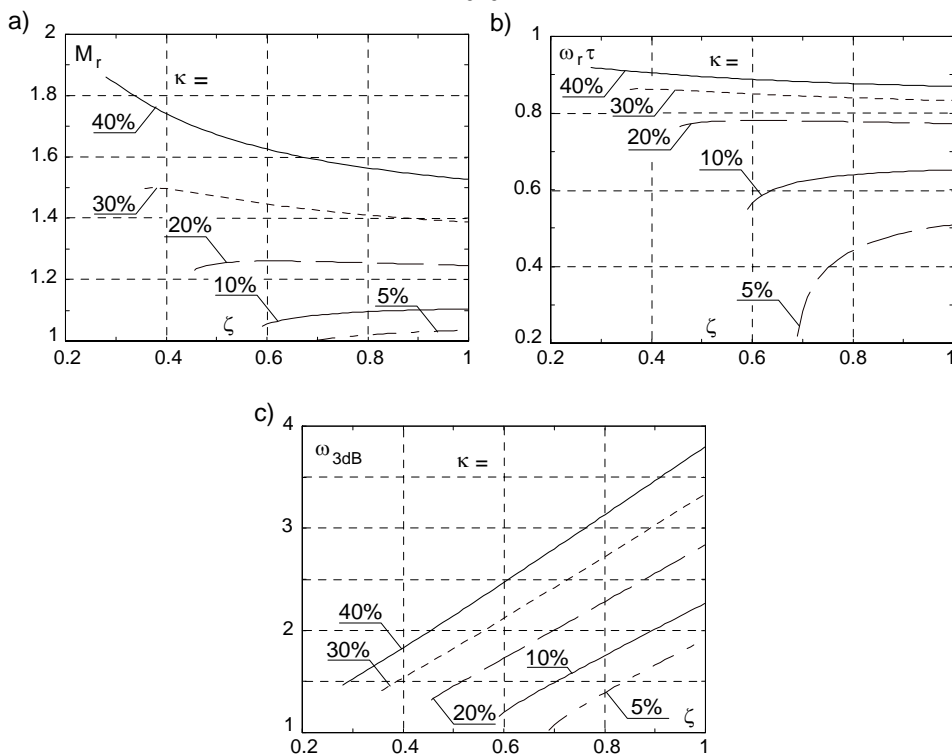


Rys. 3.8. Wskaźniki odpowiedzi skokowej członu oscylacyjnego ze skończonym zerem

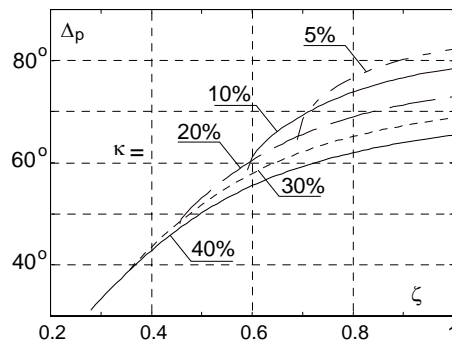


Rys. 3.9. Pulsacja odcięcia ω_{gc} układu modelowanego transmitancją rzędu drugiego ze skończonym

zerem



Rys. 3.10. Wskaźniki dotyczące charakterystyki amplitudowej członu oscylacyjnego ze skończonym zerem



Rys. 3.11. Zapas fazy układu modelowanego transmitancją rzędu drugiego ze skończonym zerem

3.2.5 Sterowanie przy pomocy sterownika PID

Rozważa się tu tylko najprostsze sposoby kompensacyjnego nastawiania sterownika PID, dające się sprowadzić do wykorzystania wzorcowych transmitancji pierwszego oraz drugiego rzędu.

W przypadku obiektu całkująco-inercyjnego (3.1) oraz sterownika PID o transmitancji (3.14) dokonuje się bezpośredniej kompensacji wpływu stałej czasowej T_p transmitancji obiektu. W tym celu transmitancję sterownika

$$G_c(s) = k_c[1 + 1/(T_i s) + T_d s] = k_c^0(1 + T_{c1}s)(1 + T_{c2}s)/s \quad (3.95)$$

kształtuje się zgodnie ze zasadą

$$T_{c1} = T_p, \quad (3.96)$$

zaś k_c^0 oraz T_{c2} są nastawialnymi parametrami (stopniami swobody) tej transmitancji, wybieranymi w oparciu o specyfikacje odniesione do transmitancji układu zamkniętego

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c^0 k_p + k_c^0 k_p T_{c2} s}{k_c^0 k_p + k_c^0 k_p T_{c2} s + s^2} = \frac{1 + \sigma \tau s}{1 + 2\zeta \tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.97)$$

gdzie

$$\zeta = T_{c2} \sqrt{k_c^0 k_p} / 2, \quad (3.98)$$

$$\sigma = T_{c2} \sqrt{k_c^0 k_p}, \quad (3.99)$$

$$\tau = 1 / \sqrt{k_c^0 k_p}. \quad (3.100)$$

Ponieważ w rozważanym przypadku zachodzi $\sigma = 2\zeta$, zatem, zgodnie z oczekiwaniem, transmitancja (3.97) udostępnia projektantowi tylko dwa stopnie swobody.

W przypadku obiektu dwuinercyjnego (3.4) istnieją dwa rozwiązania problemu doboru parametrów sterownika (3.95). Pierwsze rozwiązanie jest rozwiązaniem o dwóch stopniach swobody:

$$T_{c1} = T_{p1}, \quad (3.101)$$

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c^0 k_p + k_c^0 k_p T_{c2} s}{k_c^0 k_p + (1 + k_c^0 k_p T_{c2})s + T_{p2} s^2} = \frac{1 + \sigma \tau s}{1 + 2\zeta \tau s + \tau^2 s^2}, \quad (3.102)$$

$$\zeta = [1 / (k_c^0 k_p) + T_{c2}] \sqrt{k_c^0 k_p / T_{p2}} / 2, \quad (3.103)$$

$$\sigma = T_{c2} \sqrt{k_c^0 k_p / T_{p2}}, \quad (3.104)$$

$$\tau = \sqrt{T_{p2} / (k_c^0 k_p)}. \quad (3.105)$$

W drugim rozwiązaniu pozostaje tylko jeden stopień swobody (por. (3.94))

$$T_{c1} = T_{p1}, \quad T_{c2} = T_{p2}, \quad (3.106)$$

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_c^0 k_p}{k_c^0 k_p + s} = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (3.107)$$

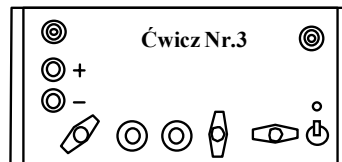
$$\tau = 1 / k_c^0 k_p. \quad (3.108)$$

3.3 Opis stanowiska.

W skład stanowiska wchodzi

3.3.1 model układu regulacji rys.3.12, zawierający:

- obiekt dynamiczny



, którego schemat ideowy przedstawia

opisany transmitancją

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_W} \times \frac{1}{sT_Z},$$

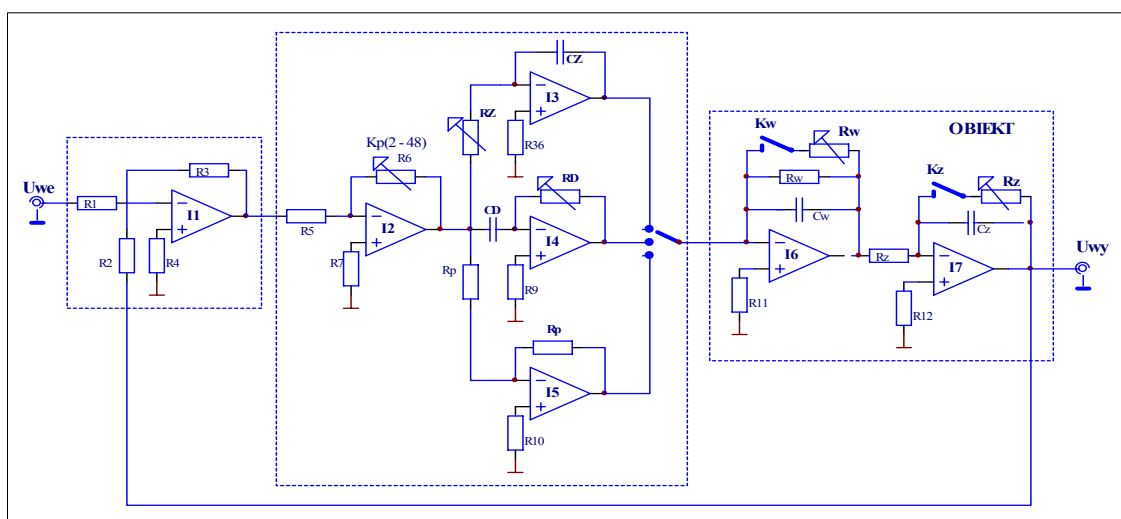
przy czym każdy z członów tego obiektu może być zamknięty indywidualną pętlą sprzężenia zwrotnego, korekcyjnego o regulowanych współczynnikach sprzężenia – odpowiednio K_W i K_Z . Zatem pełna transmitancja obiektu może być opisana funkcją

$$H(s) = \frac{1}{1 + K_W} \times \frac{1}{1 + s \frac{T_W}{1 + K_W} K_Z \left(1 + s \frac{T_Z}{K_Z}\right)},$$

przy czym K_W i K_Z zmieniają się skokowo co 1, w zakresie od $K_{W/Z} = 0$ do $K_{W/Z} = 8$, - regulator typu PID, opisany transmitancją

$$H_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right),$$

ze zmiennym skokowo współczynnikiem K_P w zakresie od $K_P = 2$ do $K_P = 48$ oraz zmieniających płynnie czasach zdwojenia T_I oraz wyprzedzenia T_D .



Rys.3.12. Schemat ideowy modelu układu

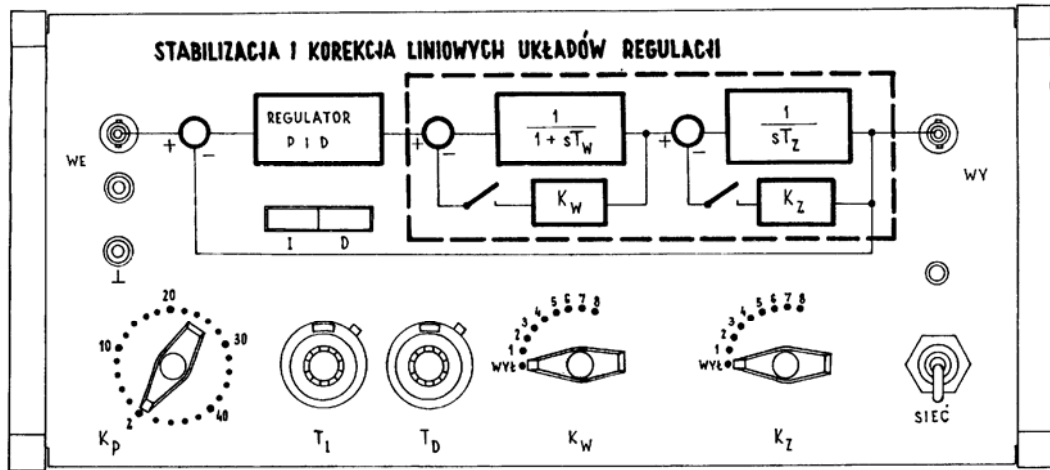
Zmiana czasów zdwojenia i wyprzedzenia zrealizowana jest przy użyciu 10-cio zwojowych potencjometrów, wyposażonych w precyzyjne skale. Jeśli oznaczymy odczyt ze skali jako n , to czas zdwojenia T_I i czas wyprzedzenia T_D możemy obliczyć z zależności

$$T_{I/D} = (2,2 + n \times 4,7) \times 2,2 \times 10^{-4} [\text{sek}],$$

przy czym n może przybierać wartości od 0.00 do 10.00.

Np. dla $n = 0$, $T_{I/D} \min(n = 0) \cong 0.48 \text{ms}$, zaś dla $n = 10$, $T_{I/D} \max(n = 10) \cong 11 \text{ms}$,

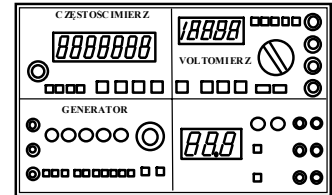
- przełącznik, umożliwiający wybór typu regulatora – P, PI, PD lub PID .
- Widok płyty czołowej modelu układu przedstawiony jest na rys.3.13.



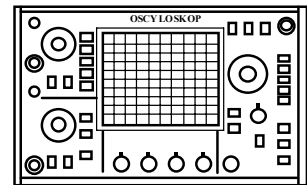
Rys.3.13. Płyta czołowa modelu układu regulacji

3.3.2 Wielofunkcyjny Zestaw Pomiarowy typu MS - 9300, zawierający między innymi:

- generator funkcji, stanowiący źródło wejściowych sygnałów periodycznych,
- częstotściomierz, umożliwiający odczyt częstotliwości sygnałów z generatora.



3.3.3 Oscyloskop dwukanałowy, umożliwiający wizualizację wybranych sygnałów oraz pomiar ich amplitud i parametrów czasowych.



3.4 Zadania pomiarowe

3.4.1 Pomiary

3.4.a Identyfikacja podstawowych parametrów modeli sterowanych obiektów

Posługując się wybranymi metodami (zob. Ćwiczenie 2), należy zidentyfikować parę parametrów (T_w, T_z), występujących we wszystkich modelach sterowanych obiektów.

3.4.b *Badanie odpowiedzi skokowej układu sterowania obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika P*

Pomierzyć wskaźniki odpowiedzi skokowej zamkniętego układu sterowania obiektem inercyjnym (przypadek a) dla trzech różnych wartości wzmocnienia sterownika P oraz przy wyłączonym korekcyjnym sprzężeniu ($K_w = \text{WYŁ}$).

Dla ustalonej wartości korekcyjnego sprzężenia k_w należy dobrać odpowiednie wartości wzmocnienia k_c sterownika P , prowadzące do przeregulowań odpowiedzi skokowej układu zamkniętego zbliżonych do poprzednio uzyskanych. Oszacować czas ustalania badanych odpowiedzi skokowych.

3.4.c *Badanie własności układu sterowania obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika PI*

Zaobserwować niestabilność układu zamkniętego, występującą przy niewłaściwie dobranej stałej całkowania T_i sterownika PI niezależnie od wartości wzmocnienia k_c tego sterownika.

Dla specyfikacji jakości sterowania zadanych przez prowadzącego, należy ustabilizować układ sterowania, projektując oraz implementując odpowiedni sterownik PI . Stopień spełnienia założeń projektu sprawdzić eksperymentalnie.

Zadanie syntezy sterownika należy rozwiązać dla dwóch przykładowych wartości sprzężenia korekcyjnego k_w .

3.4.d *Badanie własności układu sterowania obiektem dwuinercyjnym przy pomocy sterownika PI*

Dla przykładowo ustalonego obiektu dwuinercyjnego oraz dla specyfikacji jakości sterowania zadanych przez prowadzącego, należy zaprojektować odpowiedni sterownik PI , postępując zgodnie ze wskazówkami zawartymi w punkcie 3.2.3. Po zaimplementowaniu sterownika zbadać własności zamkniętego układu sterowania.

3.4.e *Badanie własności układu sterowania obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika PD*

Dla przykładowo ustalonego obiektu całkująco-inercyjnego oraz dla specyfikacji jakości sterowania zadanych przez prowadzącego, należy zaprojektować odpowiedni sterownik PD , stosując się do zaleceń z punktu 3.2.4. Potwierdzić eksperymentalnie własności zamkniętego układu sterowania.

3.4.f *Badanie własności układu sterowania obiektem całkująco-inercyjnym przy pomocy sterownika PID*

Dla przykładowo ustalonego obiektu całkująco-inercyjnego oraz dla specyfikacji jakości sterowania zadanych przez prowadzącego, należy zaprojektować odpowiedni sterownik PID , wykorzystując wskazania dane w punkcie 3.2.5. Zasadność projektu zweryfikować eksperymentalnie.

3.4.g *Badanie własności układu sterowania obiektem dwuinercyjnym przy pomocy sterownika PID*

Dla przykładowo ustalonego obiektu dwuinercyjnego oraz dla specyfikacji jakości sterowania zadanych przez prowadzącego, należy zaprojektować odpowiedni sterownik PID , biorąc pod uwagę wskazówki z punktu 3.2.5. Potwierdzić eksperymentalnie własności odpowiedniego zamkniętego układu sterowania.

3.4.2 Uwagi

Postać sygnałów wejściowych oddziałujących na badany układ sterowania, to znaczy amplitudy oraz pulsacje tych sygnałów, należy dobrać w ten sposób, aby układ laboratoryjny pracował w zakresie liniowym. Uwaga ta dotyczy przede wszystkim układów sterowania, w których stosuje się

sterownik z torem różniczkowania D (sterownik PD oraz PID). W tych przypadkach o własnościach układu sterowania należy wnioskować, rozważając pomierzone parametry charakterystyk częstotliwościowych tego układu (należy unikać pobudzania badanego układu sygnałem skokowym).

Realizacja sterownika typu P wymaga, aby klawisze "I" oraz "D" były wyciśnięte.

Sterownik typu PI uzyskuje się przy wciśniętym klawiszu "I" oraz wyciśniętym klawiszu "D".

Z kolei, sterownik typu PD wymaga wciśniętego klawisza "D" oraz wyciśniętego klawisza "I".

W celu implementacji sterownika typu PID należy wcisnąć oba klawisze ("I" oraz "D")

Pozostawienie pokręteł K_W oraz K_Z w pozycji WYŁ oznacza, iż odpowiednie sprzężenia zwrotne nie są realizowane.

3.5 Opracowanie wyników

W sprawozdaniu z ćwiczenia należy:

3.5.a Podać wyniki identyfikacji parametrów (T_w, T_z) sterowanych obiektów.

3.5.b Omówić wyniki eksperymentu z punktu 3.4.b, wskazując na praktyczne konsekwencje zastosowania w układzie sterowania korekcyjnego (kaskadowego) sprzężenia zwrotnego.

3.5.c Porównać wyniki pomiarowe wszystkich eksperymentów z wynikami uzyskanymi analitycznie. Wyjaśnić ewentualne różnice.

3.5.d Dla każdego testu pomiarowego należy oszacować postać sygnału sterującego.

3.5.e Wykreślić amplitudowe charakterystyki transmitancji sygnałowych $G_{rc}(s)$ oraz transmitancji uchybowych $G_{re}(s)$ wszystkich projektowanych układów sterowania.