

ĆWICZENIE 6

Komputerowe wspomaganie analizy i syntezy układów sterowania Linowe układy jedno- oraz wielowymiarowe

6.1 Cel ćwiczenia

Podstawowym celem ćwiczenia jest ugruntowanie wiadomości z zakresu projektowania (syntezy oraz symulacji) układów sterowania jedno- oraz wielowymiarowymi obiektami, opisywanymi odpowiednimi modelami liniowymi z czasem ciągłym. Rozważane są następujące zagadnienia:

- synteza sterowników (korektorów) w oparciu o całkowite kryteria jakości, w tym strojenie sterowników z rodziny PID z wykorzystaniem reguł Zieglera-Nicholsa,
- pozycjonowanie biegunów zamkniętego układu sterowania,
- synteza obserwatorów stanu (obserwatory o pełnym rzędzie oraz obserwatory zredukowane),
- synteza sterowana ze sprzężeniem od estymaty stanu,
- syntezy sterowania optymalnego ze względu na kwadratowe wskaźniki jakości.

Ćwiczenie polega na wykonaniu projektu (wyznaczenie struktury i parametrów układu oraz symulacja procesów sterowana) na podstawie danych (model sterowanego obiektu oraz cel sterowania) przygotowanych przez prowadzącego ćwiczenie. Obliczenia oraz eksperymenty symulacyjne realizowane są przy pomocy programu CC.

Drugorzędny, chociaż także istotny, celem ćwiczenia jest zatem zapoznanie się z zaawansowanymi możliwościami tego programu komputerowego wspomaganie projektowania układów sterowania automatycznego.

6.2 Podstawowe informacje o programie CC

Program CC, opracowany przez firmę Systems Technology, Inc., jest programem ułatwiającym analizę oraz projektowanie liniowych układów sterowania automatycznego. Zaletami tego programu, dostępnego i stosowanego obecnie w wielu ośrodkach akademickich, są niewielkie wymagania sprzętowe oraz prostota obsługi. Komunikacja z programem CC odbywa się w trybie dialogowym - użytkownik wprowadzając zlecenia programowe obserwuje na ekranie komputera wyniki działania programu w postaci danych liczbowych (dotyczących np. transmitancji operatorowych lub modeli obiektów dynamicznych w przestrzeni stanu), bądź też w postaci odpowiednich wykresów (dotyczących np. odpowiedzi skokowych lub charakterystyk częstotliwościowych badanych układów sterowania).

Podstawowymi obiektami, przetwarzanymi przez program CC są transmitancje operatorowe oraz modele stanowe, identyfikowane w programie poprzez unikalną nazwę nadaną przez użytkownika. Przykładowo, wprowadzenie informacji o transmitancji danej wzorem

$$G_p(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+1)} \quad (6.1)$$

osiąga się w sposób następujący

```
CC>gp=(s+1)/(s*(s^2+2*s+1))
```

Od tego momentu użycie nazwy gp oznacza, iż odpowiednie działanie, określone semantyką danego zlecenia programu CC, dotyczy tej właśnie transmitancji. Najprostszym zleceniem będzie po prostu wyświetlenie postaci obiektu o danej nazwie, uzyskiwane poprzez wprowadzenie tej nazwy (identyfikatora)

```
CC>gp
```

$$t f = \frac{s+1}{s(s^2+2s+1)}$$

6.2.1 Uniwersalne funkcje programu CC

Program CC udostępnia szereg uniwersalnych funkcji matematycznych, których zestawienie podano w tabeli 6.1.

ABS	ACOS	ASIN	ATN	CDIM	COS	COSH	DER	DET
EXP	IDEN	INT	LOG	LOG10	NORM	NOT	ONES	RDIM
RND	SGN	SIN	SINH	SQR	TAN	TANH	TRACE	ZERO

Tabela 6.1. Uniwersalne funkcje programu CC

Znaczenie większości nazw występujących w powyższej tabelicy jest oczywiste, pozostałych przypadków dotyczą wyjaśnienia dane niżej:

- DER - wyznaczanie pochodnej danej funkcji wymiernej zmiennej zespolonej s ,
- DET - obliczanie wyznacznika macierzy,
- IDEN - utworzenie macierzy jednostkowej,
- NORM - obliczanie normy macierzy,
- ONES - utworzenie macierzy o elementach równych 1,
- ZERO - utworzenie macierzy zerowej.

6.2.2 Analiza własności obiektów dynamicznych

Program CC umożliwia analizę własności obiektu dynamicznego w dziedzinie czasu, częstotliwości oraz na płaszczyźnie zespolonej. Dostępne są ponadto zlecenia programowe dotyczące analizy stabilności badanego układu sterowania. Listę wybranych zleceń zamieszczono w tabeli 6.2, zaś dalej podano informacje dotyczące sposobu wywołania tych zleceń.

ASYMPT	BODE	FREQ	LOGNYQ
MARGINS	NICHOLS	NYQUIST	POINT
ROOT	ROUTH	STABILITY	TIME

Tabela 6.2. Zlecenia programu CC służące analizie obiektu dynamicznego.

- ASYMPT, G, opcja, auto

Wykreślanie asymptotycznych charakterystyk częstotliwościowych obiektu dynamicznego opisanego transmitancją operatorową G ;

opcja:

- 1 - charakterystyka amplitudowa,
- 2 - charakterystyka fazowa,
- 3 - charakterystyka amplitudowa i fazowa.

- BODE, opcja, auto

Wykreślanie charakterystyk częstotliwościowych obiektu dynamicznego, na rzecz którego uprzednio wykonano zlecenie FREQ (opcja - jak w przypadku zlecenia ASYMPT).

- `FREQ, G, F1, F2, N, opcja`

Obliczanie charakterystyk częstotliwościowych obiektu dynamicznego, opisanego transmitancją operatorową G dla dyskretnego zbioru N wartości częstotliwości z przedziału $[F1, F2]$. Parametr `opcja` dotyczy sposobu wyznaczania tych częstotliwości (podział liniowy lub logarytmiczny przedziału $[F1, F2]$).

- `LOGNYQ, auto`

Wykreślanie charakterystyki Nyquista obiektu dynamicznego, na rzecz którego uprzednio wykonano zlecenie `FREQ` (zakres logarytmicznego opisu osi układu współrzędnych dobierany jest automatycznie).

- `MARGINS, G`

Szacowanie zapasu stabilności układu sterowania o torze głównym opisanym transmitancją operatorową G oraz jednostkowym sprzężeniu zwrotnym.

- `NICHOLS, auto`

Wykreślanie charakterystyki Nicholasa obiektu dynamicznego, na rzecz którego uprzednio wykonano zlecenie `FREQ`.

- `NYQUIST, auto`

Wykreślanie charakterystyki Nyquista obiektu dynamicznego, na rzecz którego uprzednio wykonano zlecenie `FREQ`.

- `POINT, G, puls`

Wyznaczenie wartości charakterystyki częstotliwościowej obiektu dynamicznego opisanego transmitancją operatorową G dla pulsacji określonej parametrem `puls`.

- `ROOT, G, auto`

Wykreślanie linii pierwiastkowych układu sterowania o torze głównym opisanym transmitancją operatorową G oraz jednostkowym sprzężeniu zwrotnym.

- `ROUTH, G`

Analiza stabilności zamkniętego układu sterowania o torze głównym opisanym transmitancją operatorową G oraz jednostkowym sprzężeniu zwrotnym (określany jest zbiór wartości wzmocnienia w torze głównym, którym odpowiada stabilny układ zamknięty).

- `STABILITY, G`

Analiza stabilności zamkniętego układu sterowania o torze głównym opisanym transmitancją operatorową G oraz jednostkowym sprzężeniu zwrotnym.

- `TIME, G, opcja, auto`

Wykreślanie charakterystyk czasowych obiektu (układu) dynamicznego opisanego transmitancją operatorową G ;

opcja :

- 1 - układ zamknięty o jednostkowym sprzężeniu zwrotnym, odpowiedź skokowa,
- 2 - układ zamknięty o jednostkowym sprzężeniu zwrotnym, odpowiedź impulsowa,
- 3 - układ otwarty, odpowiedź skokowa,
- 4 - układ otwarty, odpowiedź impulsowa.

Przy wspomaganym działaniem programu CC wykreślaniu charakterystyk badanego obiektu dynamicznego (dotyczy to zatem takich przykładowych zleceń jak BODE, ROOT lub TIME) użytkownik otrzymuje ponadto bogatą ofertę (menu) parametryzacji uzyskanego wykresu (skalowanie, wybór zakresów zobrazowania itp).

6.2.3 Synteza prostych transmitancji operatorowych

W tabeli 6.3 podano zlecenia programu CC pozwalające na uzyskanie transmitancji operatorowych założonego typu dla zadanych wartości parametrów. Sposób wywołania tych zleceń opisano niżej.

1POLE	2POLES	1ZERO
2ZEROS	LEADLAG	PADE

Tabela 6.3. Zlecenia syntezy transmitancji operatorowych.

- 1POLE, G, p

Uzyskuje się transmitancję operatorową postaci

$$G = \frac{a}{s+a}. \quad (6.2)$$

- 2POLES, G, dzeta, omega

Uzyskuje się transmitancję operatorową postaci

$$G = \frac{\omega^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot s + \omega^2}. \quad (6.3)$$

- 1ZERO, G, z

Uzyskuje się transmitancję operatorową postaci

$$G = \frac{s+z}{z}. \quad (6.4)$$

- 2ZEROS, G, dzeta, omega

Uzyskuje się transmitancję operatorową postaci

$$G = \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot s + \omega^2}{\omega^2}. \quad (6.5)$$

- LEADLAG, G, omega, theta

Uzyskuje się transmitancję operatorową, dla której przesunięcie fazowe przy pulsacji omega wynosi theta, gdy theta > 0 odpowiada to transmitancji sterownika typu 'lead', zaś dla theta < 0 otrzymujemy transmitancję sterownika typu 'lag':

$$G = \frac{b}{a} \cdot \frac{s+a}{s+b}, \quad b > a \text{ ('lead')}, \quad (6.6)$$

$$G = \frac{s+a}{s+b}, \quad b < a \text{ ('lag')}. \quad (6.7)$$

- PADE, G, T, n

Synteza wymiernej transmitancji operatorowej G aproksymującej transmitancję e^{-sT_0} modelującą opóźnienie transportowe $T_0 = T$. Uzyskuje się transmitancję o filtru wszechprzepustowego rzędu n. Użycie zlecenia DELAY, T powoduje, iż wszystkie transmitancje operatorowe dostępne w danym momencie przetwarzania mnożone są przez czynnik e^{-sT_0} , gdzie $T_0 = T$.

6.2.4 Zlecenia pozwalające na zmianę reprezentacji modeli obiektów dynamicznych

W tabeli 6.4 wymieniono zlecenia programu CC pozwalające na żadaną konwersję reprezentacji modeli obiektów dynamicznych. Dalej opisano sposób wywołania tych zleceń.

ILT	PFE	PZF
SINGLE	TCF	UNITARY

Tabela 6.4. Zlecenia konwersji reprezentacji modeli obiektów dynamicznych.

- ILT, G

Odwrotna transformata Laplace'a danej transmitancji operatorowej G.

- PFE, G

Rozkład na ułamki proste danej transmitancji operatorowej G.

- PZF, G

Dana transmitancja operatorowa G reprezentowana jest w postaci czynnikowej.

- SINGLE, G

Dana transmitancja operatorowa G reprezentowana jest w postaci, w której wielomiany licznika i mianownika mają postać rozwiniętą i uporządkowaną.

- TSF, G

Wyświetlana jest reprezentacja transmitancji operatorowej G, w której wielomiany licznika i mianownika mają wyróżnione stałe czasowe.

- UNITARY, G

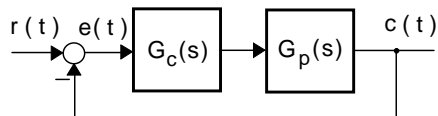
Dana transmitancja operatorowa G reprezentowana jest w postaci, w której wielomiany licznika i mianownika są wielomianami monicznymi.

6.3 Elementy syntezy jednowymiarowych układów sterowania

W punkcie tym podano uzupełniające wiadomości, dotyczące prostych reguł projektowania jednowymiarowych układów sterowania. Rozważono reguły oparte o całkowite kryteria jakości sterowania, w tym reguły Zieglera-Nicholsa.

6.3.1 Wyznaczanie całkowych wskaźników jakości sterowania

Niech $r(t)$ oznacza wejście zaś $c(t)$ wyjście rozważanego układu sterowania (rys. 6.1).



Rys. 6.1. Strukturalny schemat układu sterowania

Definiując uchyb sterowania jako

$$e(t) = r(t) - c(t), \quad (6.8)$$

zakłada się, iż

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (6.9)$$

Następujące wskaźniki całkowite należą do najczęściej stosowanych w praktyce:

1. Całka z kwadratu uchybu, oznaczana zazwyczaj skrótem ISE (integral square error)

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt. \quad (6.10)$$

2. Całka ważona z bezwzględnej wartości uchybu, oznaczana zazwyczaj skrótem ITAE (integral of time multiplied absolute error)

$$\text{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt. \quad (6.11)$$

3. Wazona całka z kwadratu uchybu, oznaczana zazwyczaj skrótem ITSE (integral of time multiplied square error)

$$\text{ITSE} = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt. \quad (6.12)$$

4. Zmodyfikowana całka z kwadratu uchybu, oznaczana zazwyczaj skrótem MISE (modified integral square error)

$$\text{MISE} = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \lambda^2 \dot{e}^2(t)] dt, \quad (6.13)$$

gdzie λ - określona stała wagowa.

Wyznaczanie wskaźnika ISE

Niech $E(s)$ oznacza transformatę Laplace'a uchybu sterowania $e(t)$. Zakładając, iż ISE przyjmuje wartość skończoną otrzymuje się

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(j\omega) E(-j\omega) d(j\omega). \quad (6.14)$$

Niech $E(s)$ będzie następującą funkcją wymierną

$$E(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + \dots + a_1s + a_0}. \quad (6.15)$$

W tabeli 6.5 podane wartości ISE dla $n = 1, 2$ i 3 .

n	ISE
1	$\frac{b_0^2}{2a_0a_1}$
2	$\frac{a_0b_1^2 + a_2b_0^2}{2a_0a_1a_2}$
3	$\frac{a_0a_1b_2^2 + a_0a_3(b_1^2 - 2b_0b_2) + a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(-a_0a_3 + a_1a_2)}$

Tabela 6.5. Wartości ISE

Wyznaczanie wskaźnika ITAE

Wskaźnik ten - posiadający liczne zalety - bardzo trudno wyznaczyć analitycznie, chociaż może być względnie łatwo wyznaczony eksperymentalnie. Zakładając, że transmitancja operatorowa zamkniętego układu sterowania ma następującą postać funkcyjną

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_n}{A(s)} = \frac{a_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}, \quad a_n = \omega_n^2, \quad (6.16)$$

można posłużyć się tabelą 6.6, w której podana jest postać tej transmitancji minimalizująca wskaźnik ITAE. Zgodnie ze wzorem (6.9) odpowiedź skokowa rozważanego układu sterowania nie wykazuje uchybu ustalonego.

n	$A(s)$
1	$s + \omega_1$
2	$s^2 + 1.4\omega_2s + \omega_2^2$
3	$s^3 + 1.75\omega_3s^2 + 2.15\omega_3^2s + \omega_3^3$
4	$s^4 + 2.1\omega_4s^3 + 3.4\omega_4^2s^2 + 2.7\omega_4^3s + \omega_4^4$

Tabela 6.6. Transmitancja układu sterowania optymalna ze względu na kryterium ITAE.

Wyznaczanie wskaźnika ITSE

W przypadku ITSE postępuje się analogicznie jak dla ISE. Zakładając, iż odpowiednia całka przyjmuje wartość skończoną, stosuje się wzór

$$\text{ITSE} = \int_0^{\infty} te^2(t)dt = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{dE(j\omega)}{d(j\omega)} E(-j\omega) d(j\omega). \quad (6.17)$$

Transformacie $E(s)$, określonej wzorem (6.15), odpowiadają wartości ITSE dane w tabeli 6.7.

n	ITSE
□1	$\frac{b_0^2}{4a_0^2}$
□2	$\frac{b_0^2}{4a_0^2} + \frac{a_0b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2}{2a_0a_1^2}$
□□3 □	$\frac{b_0^2}{4a_0^2} - \frac{a_0b_1b_2 + a_2b_0b_1}{2a_0(a_1a_2 - a_0a_3)} + \frac{a_0(a_1^2b_2^2 + a_0a_1) + a_0(b_1^2 - 2b_0b_2)(a_1a_3 + a_2^2) + b_0^2(a_0a_3^2 + a_2^3)}{2a_0(a_1a_2 - a_0a_3)}$

Tabela 6.7. Wartości ITSE

Wyznaczanie wskaźnika MISE daje się sprowadzić do wyznaczania wskaźnika ISE.

Przykład 1

Transmitancja operatorowa zamkniętego układu sterowania z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 6.1) wyraża się wzorem $G_{rc}(s) = C(s)/R(s) = \omega_n^2 / (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2)$, przy czym bieguny tej transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej. Zakładając, że do wejścia tego układu przyłożono sygnał zadający w postaci skoku jednostkowego, zaś ISE (-całka z kwadratu uchybu) jest kryterium kosztów sterowania, znajdź wartość współczynnika tłumienia ζ zapewniającą minimalizację ISE. Oszacuj przeregulowanie $\kappa\%$ oraz czas ustalania $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej tak zaprojektowanego układu zamkniętego.

Odpowiedź

Transformata uchybu wyraża się wzorem $E(s) = E(s)/R(s) = (2\zeta\omega_n + s) / (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2)$.

Z tabeli całek ISE (Tabela 6.5) wynika, iż w tym przypadku zachodzi $ISE = (1 + 4\zeta^2) / (4\zeta^2\omega_n)$. Przyrównując do zera pochodną ISE względem ζ , otrzymuje się równanie $8\zeta_{opt} \cdot 4\zeta_{opt} - 4(1 + 4\zeta_{opt}^2) = 0$. A zatem $\zeta_{opt} = 0.5$, czemu odpowiada $ISE|_{\zeta_{opt}} = \omega_n^{-1}$ oraz $\kappa\%|_{\zeta_{opt}} \approx 16\%$. Wyniki te łatwo jest sprawdzić przy pomocy programu CC.

Przykład 2

Dany jest układ sterowania z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym, opisany operatorową transmitancją $G_{rc}(s) = \omega_n^2 / (\omega_n^2 + a_1s + s^2)$. Wyznacz optymalną wartość ζ_{opt} współczynnika tłumienia ζ tego układu, przy której wskaźnik $ITAE(e(\cdot)) = \int_0^\infty t |e(t)| dt$ osiąga wartość minimalną, gdzie $e(t)$ jest uchybem towarzyszącym skokowemu pobudzeniu.

Odpowiedź

Z tabeli 6.6 wynika, iż optymalną formą transmitancji jest $G_{rc_{opt}}(s) = \omega_n^2 / (\omega_n^2 + 1.4\omega_n s + s^2)$.

Co oznacza, że w rozważanym przypadku $\zeta_{opt} = 0.7$. Na tej podstawie oszacować można wartość przeregulowania odpowiedzi skokowej optymalnego układu sterowania: $\kappa|_{\zeta_{opt}} = 4.6\%$.

Przykład 3

Transmitancja operatorowa otwartego układu sterowania z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym dana jest wzorem $G_0(s) = k_i / [s(1 + Ts)]$. Należy wyznaczyć wartość nastawy k_i , dla której następująco zdefiniowany wskaźnik MISE (zmodyfikowane kryterium ISE) przyjmuje wartość minimalną $MISE(e(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^2(t) + \lambda^2 \dot{e}^2(t) dt$, gdzie $e(t)$ jest uchybem sterowania dla skokowego sygnału zadającego.

Odpowiedź

W rozpatrywanym przypadku zachodzi $e(\infty) = 0$, zatem całkę MISE można wyrazić wzorem

$$MISE = \int_0^{\infty} [e(t) + \lambda \dot{e}(t)]^2 dt + \lambda e^2(0), \quad (6.18)$$

wynikającym z przekształcenia

$$\int_0^{\infty} [(e(t) + \lambda \dot{e}(t))^2 - 2\lambda e(t)\dot{e}(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [e(t) + \lambda \dot{e}(t)]^2 dt - 2\lambda \int_0^{\infty} e(t)\dot{e}(t) dt. \quad (6.19)$$

Transformata sygnału uchybu dana jest wzorem

$$E(s) = (1 + Ts) / (k_i + s + Ts^2). \quad (6.20)$$

A zatem $e(0) = 1$. Transformatę Laplace'a funkcji $e(t) + \lambda \dot{e}(t)$ określa wzór

$$L[e(t) + \lambda \dot{e}(t)] = E(s) + \lambda sE(s) - \lambda e(0), \quad (6.21)$$

z którego otrzymujemy

$$L[e(t) + \lambda \dot{e}(t)] = (1 - \lambda k_i + Ts) / (k_i + s + Ts^2). \quad (6.22)$$

Na podstawie powyższego wzoru wyznaczamy poszukiwaną wartość całki MISE (k_i)

$$MISE(k_i) = (1 + k_i T + \lambda^2 k_i^2) / (2k_i). \quad (6.23)$$

Optymalna wartość parametru k_i wynosi zatem $k_{i\text{opt}} = 1/\lambda$.

Przykład 4

W pewnym zamkniętym układzie sterowania z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym transformata uchybu przy pobudzeniu tego układu skokiem jednostkowym wyraża się wzorem $E(s) = (a_1 + a_2 s + s^2) / (a_1 s + a_2 s^2 + s^3)$, gdzie a_1 i a_2 są nastawialnymi parametrami tego układu. Przyjmując wielkość ISE jako kryterium kosztów działania owego układu, znajdź wartości parametrów a_1 i a_2 , zapewniające minimalizację tego wskaźnika, a następnie wyznacz im odpowiadającą transmitancję układu zamkniętego.

Odpowiedź

Optymalnymi wartościami parametrów a_1 i a_2 są następujące: $a_{1\text{opt}} = 2$ oraz $a_{2\text{opt}} = 1$. Ponieważ w rozważanym przypadku zachodzi $G_0(s) = 1/(sE(s)) - 1$, gdzie $G_0(s)$ jest transmitancją operatorową układu otwartego, dla optymalnych wartości parametrów a_1 i a_2 układu otrzymujemy $G_{0\text{opt}}(s) = 1/[s(2 + s + s^2)]$. Na tej podstawie transmitancja $G_{rc\text{opt}}(s)$ optymalnego układu zamkniętego wyraża się wzorem $G_{rc\text{opt}}(s) = 1/(1 + 2s + s^2 + s^3)$.

Przykład 5

Układ sterowania, wykonujący zadanie serwomechanizmu, przedstawia się jak na rys. 6.1. Transmittancja układu otwartego ma postać

$$G_0(s) = G_c(s)G_p(s) = k_v / [s(1 + sT_1)(1 + sT_2)]. \quad (6.24)$$

Należy określić wartość wzmocnienia prędkościowego k_v , odpowiadającego minimum ISE, przy założeniu, że na wejście tego układu przykłada się skok jednostkowy.

Odpowiedź

Optymalne wzmocnienie prędkościowe rozważanego układu sterowania wynosi

$$k_{v\text{opt}} = (T_1 + T_2) / [T_1T_2 + (T_1 + T_2)\sqrt{T_1T_2}]. \quad (6.25)$$

Przykład 6

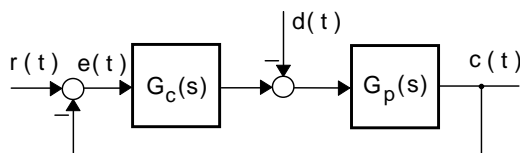
Transmittancja operatorowa zamkniętego układu sterowania z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym ujemnym dana jest wzorem $G_{rc}(s) = 1 / (1 + 2\zeta s + s^2)$, $\zeta \geq 1$. Zakładając, że sygnał $r(t)$ przyłożony do wejścia tego układu jest skokiem jednostkowym $r(t) = \mathbf{1}(t)$, a kryterium jakości sterowania jest całka z bezwzględnej wartości uchybu (IAE), znajdź zależność owej wielkości od wartości współczynnika tłumienia ζ .

Odpowiedź

Szukaną zależnością jest funkcja liniowa $\text{IAE}(\zeta) = 2\zeta$.

Przykład 7

Dla układu sterowania o schemacie strukturalnym jak na rys. 6.2 należy wyznaczyć wartość stałej całkowania k_i minimalizującej ISE dla jednostkowego skokowego sygnału zakłócającego $d(t) = \mathbf{1}(t)$.



Rys. 6.2. Strukturalny schemat układu sterowania

Oszacuj wartości przeregulowania κ oraz czasu ustalania $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej tak optymalizowanego zamkniętego układu sterowania..

Odpowiedź

W rozważanym przypadku wartość całki z kwadratu błędu sterowania dana jest wzorem

$$\text{ISE}(k_i) = (1 + n) / [2k_i(1 + n - k_iTn)]. \quad (6.26)$$

Oznaczając szukaną wartość parametru k_i przez $k_{i\text{opt}}$ znajdujemy

$$k_{i\text{opt}} = (1 + n) / (2nT). \quad (6.27)$$

Wartości κ oraz czasu ustalania $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej rozważanego układu sterowania podano w tabeli 6.8.

n	$k_{i\text{opt}}$	κ	$T_{s5\%}$
1	1	54.4%	$22.7T$
2	0.75	56.4%	$32.5T$
5	0.6	64.0%	$70.2T$

Tabela 6.8. Wskaźniki odpowiedzi skokowej układu sterowania

Przykład 8

Transmitancja operatorowa otwartego układu sterowania z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym dana jest wzorem

$$G_0(s) = k_0(1 + sT\sigma) / [s^2(1 + sT)]. \quad (6.28)$$

Zakładając, iż zamknięty układ sterowania jest układem stabilnym oraz wartości parametrów k_0 i σ są ustalone, wyznacz wartość stałej czasowej T tego układu, dla której całka z kwadratu uchybu przy jednostkowym pobudzeniu skokowym przyjmuje wartość minimalną.

Odpowiedź

Przy uczynionych założeniach całka ISE wyraża się wzorem

$$\text{ISE}(T) = (T^2 k_0 \sigma + 1) / [2T k_0 (\sigma - 1)]. \quad (6.29)$$

Optymalną wartością parametru T jest zatem $T_{\text{opt}} = 1 / \sqrt{k_0 \sigma}$.

Przykład 9

Transmitancja operatorowa pewnego otwartego układu sterowania z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym wynosi

$$G_0(s) = (k_p + s k_i) / [s(1 + sT)], \quad T > 0. \quad (6.30)$$

Należy dobrać wartości nastaw k_p oraz k_i tego układu, tak aby w układzie zamkniętym całka z kwadratu odpowiedzi impulsowej $g(t)$ przyjmowała wartość minimalną.

Odpowiedź

Całka z kwadratu odpowiedzi impulsowej tego układu dana jest wzorem

$$\int_0^{\infty} g^2(t) dt = (k_p T + k_i^2) / [2T(1 + k_i)], \quad (6.32)$$

z którego otrzymuje się optymalną wartość nastawy k_i

$$k_{i\text{opt}} = \sqrt{1 + k_p T} - 1. \quad (6.33)$$

6.3.2 Reguły Zieglera-Nicholsa

Reguły dane przez Zieglera i Nicholasa, stanowią podstawę dwóch bardzo prostych metody strojenia sterowników z rodziny *PID* dla danego procesu. Reguły te zostały wyprowadzone na podstawie empirycznego strojenia takich sterowników dla typowych procesów przy zastosowaniu wskaźnika IAE (integral absolute error).

Pierwsza metoda opiera się na analizie kształtu początkowego fragmentu odpowiedzi skokowej obiektu sterowania. Druga metoda korzysta z informacji uzyskanej na granicy stabilności zamkniętego układu sterowania ze sterownikiem proporcjonalnym (*P*).

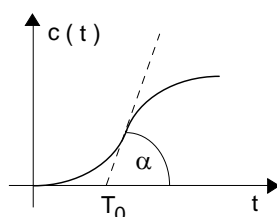
W obu przypadkach, zakłada się następującą idealizowaną postać operatorowej transmitancji sterownika *PID*

$$G_c(s) = k_c[1 + 1/(T_i s) + sT_d s]. \quad (6.34)$$

Reguły pierwszego rodzaju: nastawianie sterowników PID według kształtu odpowiedzi skokowej obiektu.

W metodzie tej przyjmuje się, iż o dynamice sterowanego obiektu decydują tylko dwa parametry (rys. 6.3):

- α - maksymalne nachylenie stycznej do odpowiedzi skokowej obiektu w początkowym fragmencie jej przebiegu,
- T - moment, w którym owa styczna przecina oś czasu.



Rys. 6.3. Model początkowego fragmentu odpowiedzi skokowej

Zakłada się zatem, że transmitancja operatorowa sterowanego obiektu może być aproksymowana za pomocą następującej transmitancji prototypowego członu rzędu pierwszego z opóźnieniem

$$G_d(s) = k_p e^{-Ts} / s, \quad k_p = \text{tg}\alpha. \quad (6.35)$$

Dla takiego uproszczonego modelu obiektu nastawy sterowników *PID* ustala się według reguł podanych w tabeli 6.9.

Sterownik	k_c	T_i	T_d
<i>P</i>	$\frac{1}{k_p T}$	∞	0
<i>PI</i>	$\frac{0.9}{k_p T}$	$3.3T$	0
<i>PID</i>	$\frac{1.2}{k_p T}$	$2T$	$0.5T$

Tabela 6.9. Reguły Zieglera-Nicholsa (- pierwszego rodzaju).

Reguły drugiego rodzaju: nastawianie sterowników *PID* według parametrów drgań granicznych. Zakłada się, że w układzie sterowania ze sterownikiem typu *P* poprzez nastawienie wartości wzmocnienia tego sterownika wzbudzone zostają okresowe drgania. Niech k_g będzie odpowiadającą temu wartością wzmocnienia sterownika *P*, zaś T_g - okresem owych drgań granicznych. Wtedy nastawy sterowników *PID* ustala się według reguł podanych w tabeli 6.10. Jak łatwo zauważyć, w przypadku sterownika *PID* obowiązuje zasada $T_i = 4T_d$.

Alternatywną propozycją nastawiania sterownika *PID*, w stosunku do reguły Zieglera-Nicholsa, jest metoda Pessena: $k_c = k_g / 5$, $T_i = T_g / 3$, $T_d = T_g / 2$.

Sterownik	k_c	T_i	T_d
P	$0.5k_g$	∞	0
PI	$0.45k_g$	$0.83 \div 0.85T_g$	0
PID	$0.6k_g$	$0.5T_g$	$0.125T_g$

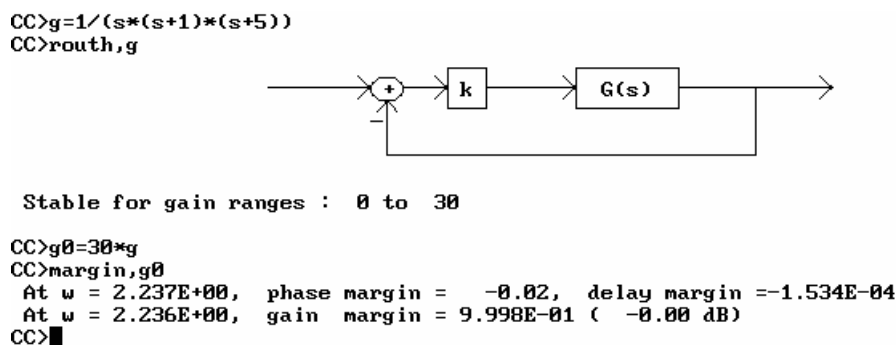
Tabela 6.10. Reguły Zieglera-Nicholsa (- drugiego rodzaju).

Przykład 10

Dany jest zamknięty układ sterowania o schemacie strukturalnym jak na rys. 6.1. Sterowany obiekt posiada transmitancję $G_p(s) = 12/[s(1+s)(5+s)]$. Stosując drugi rodzaj reguł Zieglera-Nicholsa należy wyznaczyć nastawy sterownika PID . Następnie, przy pomocy programu CC, należy oszacować przeregulowanie $\kappa\%$ odpowiedzi skokowej w układzie zamkniętym z takim sterownikiem. Okaże się, iż przeregulowanie to ma nadmierną wartość. Czy zadowalającą odpowiedź skokową można uzyskać metodą dostrojenia wzmocnienia sterownika PID ?

Odpowiedź

Jak łatwo sprawdzić (rys. 6.4) w rozważanym przypadku otrzymuje się: $k_g = 30$ oraz $T_g = 2.81s$, a zatem sterownik PID o transmitancji operatorowej (6.34), nastawia się następująco: $k_c = 0.6k_g = 18$, $T_i = 0.5T_g = 1.405s$, $T_d = 0.125T_g = 0.3512s$.



Rys. 6.4. Przykładowa sesja obliczeń przy pomocy programu CC

Oznacza to, iż tak otrzymany sterownik PID ma biegun w zerze oraz podwójne zero w punkcie $s = -1.4235$. Takim nastawom towarzyszy przeregulowanie odpowiedzi skokowej $\kappa\% \approx 62\%$, co jest wartością nadmierną. Zmniejszając dwukrotnie wartość wzmocnienia k_c , bez zmiany położenia podwójnego zera, osiąga się dwukrotne zmniejszenie przeregulowania oraz przyspieszenie odpowiedzi skokowej; to ostanie można objaśnić tym, że dominujące bieguny układu zamkniętego leżą wówczas w pobliżu zer tego układu (można się o tym przekonać analizując przy pomocy programu CC obraz linii pierwiastkowych układu zamkniętego).

Przykład 11

Obiekt o transmitancji operatorowej danej wzorem $G_p(s) = 12/[(1+s)(2+s)(3+s)]$ jest sterowany w układzie z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym przy użyciu sterownika PID o transmitancji operatorowej (6.34). Posługując się programem CC, wyznaczyć nastawy odpowiadające obydwu wersjom metody Zieglera-Nicholsa:

- dla sterownika PI ($T_d = 0$),
- dla sterownika PID .

Oszacować przeregulowanie κ odpowiedzi skokowej układu zamkniętego i czas ustalania $T_{s5\%}$ tej odpowiedzi dla każdego z rozważanych przypadków

Odpowiedź

a) Sterownik *PI*

I-y rodzaj reguła Zieglera-Nicholsa ($k_p = 0.888$, $T = 0.433$ s):

$$k_c = 2.342, T_i = 1.429\text{s}, \kappa_{\%} = 68.9\%, T_{s5\%} = 17.4\text{s};$$

II-gi rodzaj reguła Zieglera-Nicholsa:

$$k_c = 2.25, T_i = 1.572\text{s}, \kappa_{\%} = 63\%, T_{s5\%} = 13.6\text{s}.$$

a) Sterownik *PID*

I-y rodzaj reguła Zieglera-Nicholsa ($k_g = 5$, $T_g = 1.894$ s):

$$k_c = 3.12, T_i = 0.866\text{s}, T_d = 0.217\text{s}, \kappa_{\%} = 51\%, T_{s5\%} = 4.9\text{s};$$

II-gi rodzaj reguła Zieglera-Nicholsa:

$$k_c = 3, T_i = 0.947\text{s}, T_d = 0.237\text{s}, \kappa_{\%} = 44\%, T_{s5\%} = 3.8\text{s}.$$

6.4 Elementy syntezy wielowymiarowych układów sterowania

W punkcie tym przedstawiono wstępne informacje dotyczące wybranych elementów syntezy wielowymiarowych układów sterowania liniowymi obiektami z czasem ciągłym. Rozważono następujące zagadnienia: pozycjonowanie biegunów zamkniętego układu sterowania metodą sprzężenia od stanu, synteza obserwatorów oraz sterowanie optymalne ze względu na kwadratowe kryteria jakości. Wskazano na możliwości wykorzystania programu CC do rozwiązywania odpowiednich zadań projektowania.

6.4.1 Synteza autonomicznego układu sterowania ze sprzężeniem od stanu:

$$\text{obiekt SISO: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{B}r(t), \mathbf{x}(0), \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + D r(t), \end{cases} \quad (6.36)$$

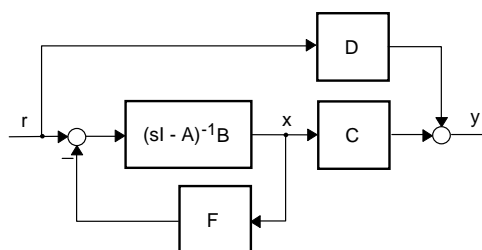
metoda Ackermanna: (para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) sterowalna, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^n$),

$$\text{sterowanie: } \begin{cases} u(t) = u_F(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t), \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{1 \times n}, \\ r(t) = 0, \end{cases} \quad (6.37)$$

$\Phi_r(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ - wielomian charakterystyczny układu zamkniętego,

$$\mathbf{F} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \Phi_r(\mathbf{A}), \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{1 \times n}. \quad (6.38)$$

$$\text{model zamkniętego układu: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0), \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (6.39)$$



Rys. 6.5. Strukturalny schemat układu sterowania ze sprzężeniem od stanu

6.4.2 Synteza autonomicznego układu sterowania ze sprzężeniem od wyjścia:

$$\text{obiekt SISO: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) + \mathbf{u}_H(t), \mathbf{x}(0), \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Dr(t), \end{cases} \quad (6.40)$$

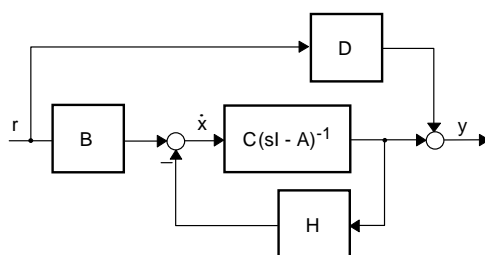
metoda Ackermanna: (para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) sterowalna, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$),

$$\text{sterowanie: } \begin{cases} \mathbf{u}_H(t) = -\mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{x}(t), \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n, \\ r(t) = 0, \end{cases} \quad (6.41)$$

$\Phi_o(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ - wielomian charakterystyczny układu zamkniętego,

$$\mathbf{H} = \Phi_o(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n, \quad (6.42)$$

$$\text{model zamkniętego układu: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0), \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (6.43)$$



Rys. 6.6. Strukturalny schemat układu ze sprzężeniem od wyjścia

6.4.3 Synteza regulatora i obserwatora (metoda Ackermanna, obiekt SISO):

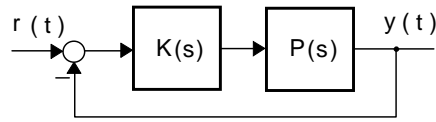
$$\text{obiekt: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \mathbf{x}(0), \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (6.44)$$

$$P(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (6.45)$$

$$\text{obserwator: } \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{H}(y_r(t) - \hat{y}(t)), \hat{\mathbf{x}}(0), \\ y_r(t) = y(t) - r(t), \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n, \end{cases}, \quad (6.46)$$

$$\text{regulator: } \begin{cases} u(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{1 \times n}, \end{cases} \quad (6.47)$$

$$\text{szeregowy kompensator } \begin{cases} K(s) = \mathbf{F}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{H}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{H}, \\ K(s) \Leftrightarrow \mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \end{cases} \quad (6.48)$$



Rys. 6.7. Model wejściowo-wyjściowy układu sterowania

6.4.4 Synteza sterowania w oparciu o odtworzony (estymowany) wektor stanu

Rozważa się obserwatory o pełnym oraz zredukowanym rzędzie.

Obserwator o pełnym rzędzie

Syntezę obserwatora o pełnym rzędzie prowadzi się w oparciu o następujące wzory:

$$\text{model sterowanego obiektu: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \end{cases} \quad (6.49)$$

$$\text{model obserwatora: } \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \hat{\mathbf{x}}(0), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times m}, \end{cases} \quad (6.50)$$

$$\text{błąd estymacji stanu: } \begin{cases} \mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{e}_x(t), \mathbf{e}_x(0), \\ \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times m}, \end{cases} \quad (6.51)$$

$$\text{regulator: } \begin{cases} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \end{cases} \quad (6.52)$$

$$\text{model zamkniętego układu: } \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} & -\mathbf{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_x(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}_x(0) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (6.53)$$

$$\text{szeregowy kompensator: } \begin{cases} \mathbf{K}(s) = \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{H}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{H}, \\ \mathbf{K}(s) \Leftrightarrow \mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{array} \right], \end{cases} \quad (6.54)$$

$$\text{sterowanie z sygnałem odniesienia: } \begin{cases} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{r}(t), \\ \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \mathbf{L} \in \mathbf{R}^{p \times r}, \end{cases} \quad (6.55)$$

modele zamkniętego układu:

stanowy model:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{L} \\ \mathbf{B}\mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t), \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

transmitancyjny model:

$$\mathbf{T}(s) \Leftrightarrow \mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & -\mathbf{BF} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{HC} & \mathbf{A} - \mathbf{BF} - \mathbf{HC} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (6.57)$$

Obserwator o zredukowanym rzędzie

Model sterowanego obiektu ma postać

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t), \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t), \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}, m < n. \end{cases} \quad (6.58)$$

Niech $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^{n-m}$, gdzie $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times n}$ jest tak dobraną macierzą, iż macierz \mathbf{E} określona wzorem

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad (6.59)$$

jest kwadratową macierzą o pełnym rzędzie $\text{rank} \mathbf{E} = n$. Warunkiem koniecznym nieosobliwości macierzy \mathbf{E} jest pełny rząd wierszowy macierzy \mathbf{C} : $\text{rank} \mathbf{C} = m$. Przedstawmy macierz odwrotną \mathbf{E}^{-1} w następującej postaci z wyróżnionymi podmacierzami \mathbf{P} oraz \mathbf{M} : $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times (n-m)}$. Na podstawie zależności

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{x}(t), \quad (6.60)$$

można zapisać, iż

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\mathbf{z}(t). \quad (6.61)$$

Z powyższego równania wynika, iż dla wyznaczenia estymaty $\hat{\mathbf{x}}(t)$ wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ niezbędne jest określenie pewnego oszacowania $\hat{\mathbf{z}}(t)$ wektora $\mathbf{z}(t)$. W tym celu należy zdefiniować odpowiedni model (równanie różniczkowe) opisujący ewolucję sygnału $\mathbf{z}(t)$ oraz model obserwacji tego sygnału ('statyczne' równanie obserwacji). Na podstawie równania stanu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$ zapisać można, iż $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, co pozwala na wykonanie następujących przekształceń

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.62)$$

z których wynika, iż

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CAP} & \mathbf{CAM} \\ \mathbf{TAP} & \mathbf{TAM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{TB} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (6.63)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{CAP}$, $\mathbf{A}_{11} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{CAM}$, $\mathbf{A}_{12} \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{TAP}$, $\mathbf{A}_{21} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$, $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{TAM}$, $\mathbf{A}_{22} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{CB}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbf{R}^{m \times p}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{TB}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbf{R}^{(n-m) \times p}$, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (6.64)$$

skąd wynika różniczkowe równanie dla zmiennej $\mathbf{z}(t)$: $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_{22}\mathbf{z}(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$. Sprawdźmy, czy w rozważanym przypadku można przyjąć standardowy model obserwatora opisany równaniem

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad (6.65)$$

gdzie $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$ jest macierzą sprzężeń obserwatora, zaś $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t)$ oznacza poszukiwaną estymatę stanu $\mathbf{x}(t)$, określoną na podstawie wyjścia $\mathbf{y}(t)$ oraz oszacowania $\hat{\mathbf{z}}(t)$. Z równości $\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{I}_m$ oraz $\mathbf{C}\mathbf{M} = \mathbf{0}_{m \times (n-m)}$ wynika, że

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t)) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}, \quad (6.66)$$

co oznacza, iż proponowana wyżej struktura obserwatora sygnału $\mathbf{z}(t)$ jest strukturą niewystarczającą - nie zapewnia ona bowiem możliwości stabilizacji obserwatora (sprzężenie zwrotne z macierzą \mathbf{H} jest w rzeczywistości sprzężeniem nieefektywnym). Rozważmy zatem kolejną strukturę, w której jako podstawę stabilizacji obserwatora przyjmuje się sprzężenie zwrotne wykorzystujące sygnał różnicowy $\dot{\mathbf{y}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t)$ zdefiniowany dla pochodnej $\dot{\mathbf{y}}(t)$ wyjścia obiektu $\mathbf{y}(t)$ oraz estymaty $\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t)$ tej pochodnej. Rozważmy zatem model obserwatora opisany wzorem

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t)). \quad (6.67)$$

Niech $\mathbf{e}_z(t) = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)$, $\mathbf{e}_z(t) \in \mathbf{R}^{(n-m)}$, oznacza błąd estymacji $\mathbf{z}(t)$. Zachodzi przy tym

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}(\mathbf{z}(t) - \mathbf{e}_z(t)) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{M}\mathbf{e}_z(t), \quad (6.68)$$

co oznacza, iż błędy odpowiednich oszacowań $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ oraz $\mathbf{e}_z(t) = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)$ powiązane są w następujący sposób: $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{M}\mathbf{e}_z(t)$. Jak łatwo pokazać, ewolucję błędu $\mathbf{e}_z(t)$ opisuje jednorodne równanie różniczkowe $\dot{\mathbf{e}}_z(t) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{12})\mathbf{e}_z(t)$, $\mathbf{e}_z(0)$. Stabilne rozwiązanie tego równania uzyskać można rozważając standardowe zadanie syntezy obserwatora dla pary macierzy $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{12})$. Jeżeli zatem para $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{12})$ jest całkowicie obserwowalna, wówczas istnieje taka stabilizująca macierz $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$, dla której wszystkie wartości własne macierzy przejścia stanów $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{12}$ zredukowanego obserwatora leżą w zadanych miejscach otwartej lewej półpłaszczyzny płaszczyzny zespolonej. W praktyce zwykle unika się różniczkowania sygnałów pomiarowych $\mathbf{y}(t)$, spóbjmy zatem tak zmodyfikować strukturę zredukowanego obserwatora, aby wyeliminować z niej jawną obecność sygnału $\dot{\mathbf{y}}(t)$. Rozważmy w tym celu następującą transformację zmiennych $\mathbf{w}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{H}\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^{(n-m)}$. Wyznamy różniczkowe równanie, którego rozwiązanie stanowi tak zdefiniowana pomocnicza zmienna $\mathbf{w}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(t) &= \dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) - \mathbf{H}\dot{\mathbf{y}}(t) = \\ &= \mathbf{A}_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t)) - \mathbf{H}\dot{\mathbf{y}}(t) = \\ &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{12})\mathbf{w}(t) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{H}\mathbf{B}_1)\mathbf{u}(t) + (\mathbf{A}_{22}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{12}\mathbf{H} + \mathbf{A}_{21} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{11})\mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Oszacowanie $\hat{\mathbf{x}}(t)$ wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ przyjmuje zatem postać

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{w}(t) + (\mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{H})\mathbf{y}(t). \quad (6.70)$$

Niech poszczególne symbole znaczą: $\mathbf{A}_w = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_w \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\mathbf{A}_u = \mathbf{B}_2 - \mathbf{H}\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_u \in \mathbf{R}^{(n-m) \times p}$, $\mathbf{A}_y = \mathbf{A}_{22}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{12}\mathbf{H} + \mathbf{A}_{21} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_w\mathbf{H} + \mathbf{A}_{21} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_y \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$, oraz $\mathbf{M}_y = \mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{H}$, $\mathbf{M}_y \in \mathbf{R}^{n \times m}$, otrzymujemy następujący model zredukowanego obserwatora

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{w}(t) + \mathbf{A}_u \mathbf{u}(t) + \mathbf{A}_y \mathbf{y}(t), \mathbf{w}(0), \\ \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{w}(t) + \mathbf{M}_y \mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (6.71)$$

Zakładając sterowanie w postaci sprzężenia od estymaty stanu $\hat{\mathbf{x}}(t)$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \end{cases} \quad (6.72)$$

otrzymujemy następujący model zamkniętego układu sterowania

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}_z(0) \end{bmatrix}. \quad (6.73)$$

Z kolei, przyjmując w równaniu $\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{w}(t) + \mathbf{A}_u \mathbf{u}(t) + \mathbf{A}_y \mathbf{y}(t)$ założoną postać sterowania $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{w}(t) - \mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{y}(t)$ uzyskujemy równanie

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = (\mathbf{A}_w - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M})\mathbf{w}(t) + (\mathbf{A}_y - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M}_y)\mathbf{y}(t), \quad (6.74)$$

z którego otrzymujemy model szeregowego kompensatora odpowiadającego rozważanemu układowi sterowania

$$\mathbf{K}_r(s) \Leftrightarrow \mathbf{K}_r = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_w - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M} & \mathbf{A}_y - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M}_y \\ \hline -\mathbf{F}\mathbf{M} & -\mathbf{F}\mathbf{M}_y \end{array} \right]. \quad (6.75)$$

Zakładając sterowanie z sygnałem odniesienia $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{R}^r$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{r}(t), \\ \mathbf{L} \in \mathbf{R}^{m \times r}, \end{cases} \quad (6.76)$$

łatwo wyznaczyć można następujące modele zamkniętego układu sterowania:

model w przestrzeni stanów

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M} \\ \mathbf{A}_y \mathbf{C} - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{C} & \mathbf{A}_w - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{L} \\ \mathbf{A}_u \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{w}(0) \end{bmatrix}, \quad (6.77)$$

model transmitancyjny:

$$\mathbf{T}_r(s) \Leftrightarrow \mathbf{T}_r = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M} & \mathbf{B}\mathbf{L} \\ \mathbf{A}_y \mathbf{C} - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{C} & \mathbf{A}_w - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M} & \mathbf{A}_u \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (6.78)$$

Autonomiczny układ sterowania ($\mathbf{r}(t) = 0, \forall t$) opisany jest stanowym modelem

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M} \\ \mathbf{A}_y \mathbf{C} - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M}_y \mathbf{C} & \mathbf{A}_w - \mathbf{A}_u \mathbf{F}\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{w}(0) \end{bmatrix}. \quad (6.79)$$

Jak już powiedziano, sygnał $\mathbf{w}(t)$, występujący w powyższych modelach, ma charakter pomocniczego sygnału wprowadzonego w celu uniknięcia różniczkowania wyjścia obiektu.

Symulacyjną analizę jakości estymacji oraz jakości sterowania w rozważanym układzie zamkniętym dogodnie jest prowadzić opierając się między innymi na porównaniu sygnałów $\mathbf{x}(t)$ oraz $\hat{\mathbf{x}}(t)$. W tym celu niezbędne jest odwzorowanie pary $(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t))$ w parę $(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$, co osiąga się stosując następujące liniowe przekształcenie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_y \mathbf{C} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}. \quad (6.80)$$

Zauważmy ponadto, iż z równości $\mathbf{w}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{H}\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ wynika, iż po założeniu w symulacyjnej procedurze warunków początkowych $(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(0))$, niezbędne jest przyjęcie warunku początkowego $\mathbf{w}(0)$ zgodnie ze wzorem $\mathbf{w}(0) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$. W przypadku, w którym współrzędne wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ występują w wektorze wyjścia $\mathbf{y}(t)$ w sposób 'bezpośredni', to znaczy, gdy w macierzy \mathbf{C} można wyróżnić podmacierz jednostkową oraz podmacierz zerową $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \ \vdots \ \mathbf{0}_{m \times (n-m)}]$, macierze \mathbf{T} , \mathbf{E} , \mathbf{P} oraz \mathbf{M} przyjmują następujące proste postacie:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{0}_{(n-m) \times m} \ \vdots \ \mathbf{I}_{n-m}], \quad \mathbf{E} = \mathbf{I}_n, \quad (6.81)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}. \quad (6.82)$$

6.4.5 Synteza sterowania w oparciu o kwadratowy wskaźnik jakości (zadanie LQR)

Model sterowanego obiektu dany jest wzorem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}. \end{cases} \quad (6.83)$$

Podstawowy problem sterownia LQR

Dla następująco zdefiniowanego kwadratowego wskaźnika jakości sterowania

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) (\rho \mathbf{R}) \mathbf{u}(t) dt, \quad \rho > 0, \quad (6.84)$$

przy czym

$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} > 0$ - symetryczna macierz dodatnio określona,

poszukuje się optymalnego sterowania $\mathbf{u}^*(t)$

$$\mathbf{u}^*(t) = \underset{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^p}{\operatorname{argmin}} J(\mathbf{u}(\cdot)). \quad (6.85)$$

Rozwiązanie:

zakładając, iż

dostępne są wszystkie współrzędne wektora stanu $\mathbf{x}(t)$,

para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest stabilizowalna,

para $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_Q)$ jest wykrywalna ($\mathbf{Q} = \mathbf{C}_Q^T \mathbf{C}_Q$, $\mathbf{C}_Q = \mathbf{Q}^{1/2}$),

otrzymuje się optymalne sterowanie $\mathbf{u}^*(t)$ w postaci statycznego liniowego sprzężenia od stanu

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad (6.86)$$

$$\mathbf{F} = (\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}, \quad \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \quad (6.87)$$

gdzie symetryczna dodatnio półokreślona macierz $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{P} \geq 0$, jest jednoznacznym rozwiązaniem następującego *algebraicznego równania Riccatiego* (ARE)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (6.88)$$

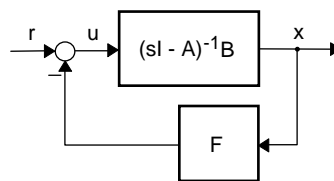
W przypadku gdy para $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_\rho)$ jest obserwowalna, \mathbf{P} jest macierzą dodatnio określoną $\mathbf{P} > 0$. Zamknięty układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (6.89)$$

jest układem asymptotycznie stabilnym, zachodzi przy tym $J(\mathbf{u}^*(\cdot)) = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$.

W przypadku, w którym strategia sterowania zakłada obecność zmiennej odniesienia $\mathbf{r}(t)$, otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (6.90)$$



Rys. 6.8. Struktura optymalnego układu sterowania

Rozszerzone problemy LQR

- Poszukuje się optymalnego sterowania $\mathbf{u}^*(t)$ dla uogólnionej postaci wskaźnika jakości sterowania

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \rho\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} dt, \quad \rho > 0, \quad (6.91)$$

przy czym

$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} > 0$ - symetryczna macierz dodatnio określona,

$\mathbf{Q} - \mathbf{N}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N}^T \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona.

Rozwiązanie:

zakładając, iż

dostępne są wszystkie współrzędne wektora stanu $\mathbf{x}(t)$,

para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest stabilizowalna,

para $(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N}^T, \mathbf{W}_Q)$ jest wykrywalna ($\mathbf{W}_Q = (\mathbf{Q} - \mathbf{N}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N}^T)^{1/2}$),
otrzymuje się optymalne sterowanie $\mathbf{u}^*(t)$ w postaci statycznego liniowego sprzężenia od stanu

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad (6.92)$$

$$\mathbf{F} = (\rho\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{N}^T), \quad \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \quad (6.93)$$

gdzie symetryczna dodatnio półokreślona macierz $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{P} \geq 0$, jest jednoznacznym rozwiązaniem następującego algebraicznego równania Riccatiego

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N}^T)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N}^T) + (\mathbf{Q} - \mathbf{N}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{N}^T) - \mathbf{P}\mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (6.94)$$

- Poszukuje się optymalnego sterowania $\mathbf{u}^*(t)$ dla zmodyfikowanej postaci wskaźnika jakości sterowania

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} \cdot (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)(\rho\mathbf{R})\mathbf{u}(t)) dt, \quad \alpha \geq 0, \quad \rho > 0, \quad (6.95)$$

przy czym

$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} > 0$ - symetryczna macierz dodatnio określona.

Rozwiązanie:
zakładając, iż

dostępne są wszystkie współrzędne wektora stanu $\mathbf{x}(t)$,

para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest stabilizowalna,

para $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_Q)$ jest wykrywalna ($\mathbf{Q} = \mathbf{C}_Q^T\mathbf{C}_Q$, $\mathbf{C}_Q = \mathbf{Q}^{1/2}$),

otrzymuje się optymalne sterowanie $\mathbf{u}^*(t)$ w postaci statycznego liniowego sprzężenia od stanu

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad (6.96)$$

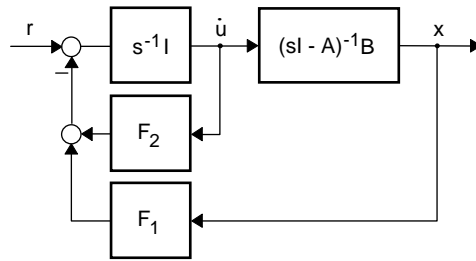
$$\mathbf{F} = (\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}, \quad \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \quad (6.97)$$

gdzie symetryczna dodatnio półokreślona macierz $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{P} \geq 0$, jest jednoznacznym rozwiązaniem następującego algebraicznego równania Riccatiego

$$(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}_n)^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}_n) + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (6.98)$$

Biegony optymalnego zamkniętego układu sterowania $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t)$ mają części rzeczywiste mniejsze od $-\alpha$, a zatem zamknięty układ charakteryzuje się zapasem stabilności określonym przez projektowy parametr α .

- Poszukuje się optymalnego sterowania $\mathbf{u}^*(t)$ w zmodyfikowanej strukturze zamkniętego układu z dodatkowymi członami całkującymi przedstawionej na rysunku 6.9



Rys. 6.9. Strukturalny schemat układu sterowania z dodatkowymi członami całkującymi

Ponieważ w rozważanym zamkniętym układzie sygnał sterujący $\mathbf{u}(t)$ podawany na obiekt stanowi wyjście integratora (integratorów), we wskaźniku jakości należy uwzględnić tylko składową przejściową $\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(\infty)$ tego sygnału (przy założeniu, iż istnieje skończona ustalona wartość $\mathbf{u}(\infty)$), bądź też, jak się to proponuje niżej, pochodną $\dot{\mathbf{u}}(t)$ sygnału $\mathbf{u}(t)$. Zauważmy, iż w rozważanym przypadku zachodzi $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{e}(t)$, gdzie $\mathbf{e}(t)$ jest odpowiednim różnicowym sygnałem

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{r}(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.99)$$

$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix}^T$ oznacza rozszerzony wektor stanu, zaś \mathbf{F} jest poszukiwaną macierzą sprzężeń zwrotnych $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times (n+p)}$, $\mathbf{F}_1 \in \mathbf{R}^{p \times n}$ oraz $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^{p \times p}$.

Rozszerzony model sterowanego obiektu:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \mathbf{e}(t), \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}. \end{cases} \quad (6.100)$$

Zmodyfikowany wskaźnik jakości sterowania:

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{u}}^T(t) (\rho \mathbf{R}) \dot{\mathbf{u}}(t) \right) dt, \quad \rho > 0, \quad (6.101)$$

przy czym, podobnie jak poprzednio:

$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} > 0$ - symetryczna macierz dodatnio określona.

- Poszukuje się optymalnego sterowania $\mathbf{u}^*(t)$ dla zmodyfikowanego wskaźnika kryterialnego, w którym występuje sygnał wyjściowy $\mathbf{y}(t)$ sterowanego obiektu

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}_y \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) (\rho \mathbf{R}) \mathbf{u}(t) dt, \quad \rho > 0, \quad (6.102)$$

przy czym

$\mathbf{Q}_y \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y^T$, $\mathbf{Q}_y \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} > 0$ - symetryczna macierz dodatnio określona,
 $\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{D} (\mathbf{D}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{D} + \rho \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

Jak łatwo pokazać, stanowemu modelowi sterowanego obiektu

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \quad (6.103)$$

odpowiada następująca równoważna postać wskaźnika $J(\mathbf{u}(\cdot))$

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{D} + \rho \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} dt. \quad (6.104)$$

6.5 Zaawansowane możliwości programu CC

W punkcie tym omówiono funkcje programu CC dotyczące stanowych reprezentacji obiektów dynamicznych, wybrane algebraiczne funkcje tego programu, a także przekształcenia stanowych modeli. Omawiane funkcje dostępne są w trybie STATE programu CC.

6.5.1 Operacje dotyczące reprezentacji stanowych (\mathbf{P} - kwadrapol $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$)

- CCF, G, P
 - przyporządkowanie macierzowej transmitancji operatorowej $\mathbf{G}(s)$ sterowalnej kanonicznej reprezentacji stanowej \mathbf{P} ;
- CONMATRIX, P, P_C
 - tworzenie macierzy sterowalności \mathbf{P}_c odpowiadającej modelowi \mathbf{P} (parze (\mathbf{A}, \mathbf{B}));
- CONTROLLABILITY, P
 - test sterowalności obiektu opisanego modelem \mathbf{P} (sterowalność pary (\mathbf{A}, \mathbf{B})),
- DCF, G, P
 - przyporządkowanie macierzowej transmitancji operatorowej $\mathbf{G}(s)$ diagonalnej kanonicznej reprezentacji stanowej \mathbf{P} ;
- GEP, P, G
 - konwersja modelu stanowego \mathbf{P} na model transmitancyjny ($\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$);
- FEEDBACK, opcja, lista modeli stanowych, $\pm r$
 - realizacja różnych struktur ze sprzężeniem zwrotnym:

$$1, P, P1: \quad \mathbf{P}_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1},$$

$$2, P, P1: \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1},$$

$$3, P, P1, P2: \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{P}_1 \mathbf{P})^{-1},$$

$$4, P, F, P1: \quad \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \text{ (sprzężenie od stanu poprzez macierz } \mathbf{F}),$$

$$5, P, H, P1: \quad P_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \text{ (sprzężenie od wyjścia poprzez macierz } \mathbf{H}),$$

6, P, H, P1: P_1 powstaje z P poprzez sprzężenie r -tego wyjścia z r -tym wejściem,
(sprzężenie ujemne przy $r < 0$, sprzężenie dodatnie przy $r > 0$),

- analogiczne efekty uzyskać można w następujący sposób:

1: $P1 = I|P$,

2: $P1 = P|I$,

3: $P1 = P|P1$,

4: $P1 = P \& P1(A) = P1(A) - P1(B) * F$,

5: $P1 = P \& P1(A) = P1(A) - H * P1(C)$;

• LQR, opcja, lista kwadrupoli (macierzy), ρ

- synteza sterowania $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{p \times n}$, optymalnego ze względu na kwadratowy wskaźnik jakości;

opcje:

1, P, Q, R, F

2, P, H, R, F

3, P, E, F

4, P, F;

obiekt sterowania

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times p}, \end{cases} \quad (6.105)$$

para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) stabilizowalna,

wskaźnik jakości sterowania

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{\infty} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \right) dt, \quad \mathbf{E} \in \mathbf{R}^{(n+p) \times (n+p)}, \quad (6.106)$$

przy czym:

1: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho\mathbf{R} \end{bmatrix}$, para $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{1/2})$ wykrywalna,

2: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho\mathbf{R} \end{bmatrix}$, $\mathbf{H}^T \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, para (\mathbf{A}, \mathbf{H}) wykrywalna,

3: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \rho\mathbf{R} \end{bmatrix}$, $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n \times p}$, para $(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\rho\mathbf{R})^{-1} \mathbf{N}^T, (\mathbf{Q} - \mathbf{N}(\rho\mathbf{R})^{-1} \mathbf{N}^T)^{1/2})$
wykrywalna,

4: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho\mathbf{R} \end{bmatrix}$, para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) wykrywalna,

zaś

$\rho > 0$ - dodatni współczynnik wagi,

$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona,

$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} > 0$ - symetryczna macierz dodatnio określona,

$\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$, $\mathbf{E} \geq 0$ - symetryczna macierz dodatnio półokreślona.

- NUMERATOR, P
 - wyznaczenie licznika transmitancji operatorowej obiektu opisanego modelem \mathbf{P} ;
- OBSMATRIX, P, P_o
 - tworzenie macierzy obserwowalności \mathbf{P}_o odpowiadającej modelowi \mathbf{P} (parze (\mathbf{A}, \mathbf{C}));
- OBSERVABILITY, P
 - test obserwowalności obiektu opisanego modelem \mathbf{P} (obserwowalność pary (\mathbf{A}, \mathbf{C}));
- OCF, G, P
 - przyporządkowanie macierzowej transmitancji operatorowej $\mathbf{G}(s)$ obserwowalnej kanonicznej reprezentacji stanowej \mathbf{P} ;
- PACK, A, B, C, D, P
 - tworzenie kwadrupola \mathbf{P} na podstawie składowych macierzy \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} oraz \mathbf{D} ;
- POLEPLACE, P, K, opcja
 - pozycjonowanie biegunów układu SISO metodą Ackermanna:
 - \mathbf{P} - stanowy model obiektu,
 - \mathbf{K} - wektor sprzężeń (opcja 1 i 2) lub stanowy (kwadrupolowy \mathbf{K}) model szeregowego korektora (opcja 3),
 - opcja: **1** - synteza regulatora, **2** - synteza obserwatora, **3** synteza obserwatora i regulatora:
- POLES, P
 - wyznaczenie biegunów (wartości własnych macierzy $P(\lambda)$) odpowiadających modelowi \mathbf{P} ;
- SIMULATION, P, opcje, warunki początkowe, tmax, delta
 - symulacja procesów przejściowych w układzie dynamicznym opisanym stanowym modelem \mathbf{P} :
 - P - stanowy model obiektu,
 - warunki początkowe: 1 - zerowe warunki początkowe,
2, X0 - zadany wektor $\mathbf{x}(0)$ warunków początkowych,
 - tmax - moment zakończenia $t = t_{\max}$ procesu symulacji (start: $t = 0$),
 - delta - okres dyskretyzacji Δ symulacyjnej procedury,
 - opcje dotyczą sposobu pobudzania układu opisanego stanowym modelem \mathbf{P} :
 - 1, m, h: m -te wejście jest pobudzane sygnałem skokowym $h \cdot \mathbf{1}(t)$,
 - 2, m, h: m -te wejście jest pobudzane sygnałem impulsowym $h \cdot \delta(t)$,
 - 3, m, h, l: m -te wejście jest pobudzane sygnałem prostokątnym $h \cdot (\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-l))$,
 - 4, m, s, b: m -te wejście jest pobudzane gaussowskim sygnałem pseudolosowym o zerowej wartości średniej oraz standardowym odchyleniu $\sigma = s/\sqrt{\Delta}$, punkt

startowy generator losowego określony jest parametrem b , przy czym dla $b = 0$ start ma charakter przypadkowy,

5, m, plik: m – te wejście jest pobudzone sygnałem reprezentowanym w pliku,
6: sygnał pobudzający jest sygnałem zerowym.

- wyniki symulacji zapisywane są do pliku o nazwie P.Y; dane te można zobrazować korzystając z instrukcji

PLOT, P.Y, tr, a.

- UNPACK, P, A, B, C, D

- ekstrakcja elementów modelu P (odpowiednie żądanie wyrazić można jako np. $A=P(A)$);

- ZEROS, P

- wyznaczanie zer systemu dynamicznego opisanego stanowym modelem P .

6.5.2. Algebraiczne funkcje dostępne w CC

- EIGEN, A, D, X

- wyznaczanie wartości własnych oraz wektorów własnych macierzy A :

D - macierz dwukolumnowa zawierająca części rzeczywiste i urojone wartości własnych macierzy A ,

X - macierz, której kolumny są odpowiednimi wektorami własnymi macierzy A ;

- LYAPUNOV, F, G, P

- rozwiązanie równania Lapunowa

$$F^T P + PF + G = 0, \quad (6.107)$$

w którym:

$F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ oraz $G \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $G = G^T$, (macierz symetryczna) są macierzmi wejściowymi,

$P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $P = P^T$ (macierz symetryczna) jest rozwiązaniem;

- RICCATI, F, G, H, P

- rozwiązanie równania Riccatiego

$$F^T P + PF + G - PHP = 0, \quad (6.108)$$

w którym:

$F \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $G = G^T$, (macierz symetryczna) oraz $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $H = H^T$, (macierz symetryczna) są macierzmi wejściowymi,

$P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $P = P^T$ (macierz symetryczna) jest rozwiązaniem;

- RANK, A, r

- $r = \text{rank}A$ (rzęd macierzy A).

6.5.3. Przekształcanie stanowych opisów modeli obiektów dynamicznych

Niech

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (6.109)$$

będzie stanowym (kwadrupolowym) modelem pewnego obiektu dynamicznego. Rozważmy następujące działania dotyczące tego modelu:

negacja

$$P_1 = -P: \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{array} \right], \quad (6.110)$$

inwersja

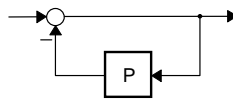
$$P_1 = I/P \text{ lub } P_1 = P \setminus I \text{ lub } P_1 = P^{-1}: \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \hline -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{D}^{-1} \end{array} \right], \quad (6.111)$$

transpozycja

$$P_1 = P': \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \hline \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{array} \right], \quad (6.112)$$

sprzężenie z jednostkowym torem głównym (rys. 6.10)

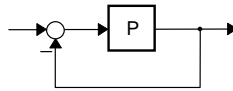
$$P_1 = I|P: \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{E} \\ \hline -\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{E} \end{array} \right], \text{ gdzie } \mathbf{E} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}, \quad (6.113)$$



Rys. 6.10. Sprzężenie z jednostkowym torem głównym

jednostkowe sprzężenie zwrotne (rys. 6.11)

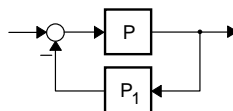
$$P_1 = P|I: \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{E} \\ \hline \mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{E}\mathbf{D} \end{array} \right], \text{ gdzie } \mathbf{E} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}, \quad (6.114)$$



Rys. 6.11. Jednostkowe sprzężenie zwrotne

sprzężenie zwrotne (rys. 6.12)

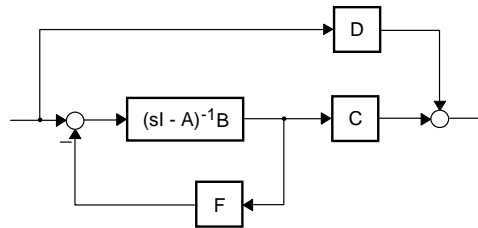
$$P_2 = P|P_1: \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{D}_1\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}\mathbf{F} \\ \hline \mathbf{B}_1\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{E}\mathbf{D} \\ \hline \mathbf{E}\mathbf{C} & -\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{C}_1 & \mathbf{E}\mathbf{D} \end{array} \right], \text{ gdzie } \mathbf{E} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{D}_1)^{-1}, \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1\mathbf{D})^{-1}, \quad (6.115)$$



Rys. 6.12. Sprzężenie zwrotne

sprzężenie zwrotne od stanu (rys. 6.13)

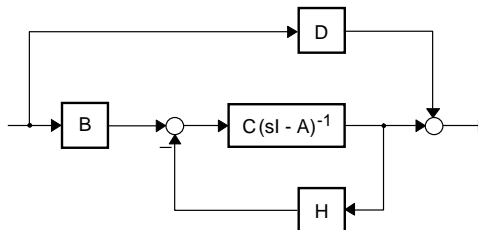
$$P_1 = P \ \& \ P_1(A) = P_1(A) - P_1(B) * F : \quad \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{BF} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \quad (6.116)$$



Rys. 6.13. Sprzężenie zwrotne od stanu

sprzężenie zwrotne od wyjścia (rys. 6.14)

$$P_1 = P \ \& \ P_1(A) = P_1(A) - H * P_1(C) : \quad \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{HC} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]. \quad (6.117)$$



Rys. 6.14. Sprzężenie zwrotne od wyjścia

Niech ponadto

$$\mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{array} \right]. \quad (6.118)$$

Rozważmy z kolei następujące działania dotyczące modeli \mathbf{P} oraz \mathbf{P}_1 :

dodawanie

$$P_2 = P + P_1 : \quad \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \end{array} \right], \quad (6.119)$$

odejmowanie

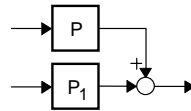
$$P_2 = P - P_1 : \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C} & -\mathbf{C}_1 & \mathbf{D} - \mathbf{D}_1 \end{array} \right], \quad (6.120)$$

mnożenie

$$P_2 = P * P_1 : \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D}\mathbf{C}_1 & \mathbf{D}\mathbf{D}_1 \end{array} \right], \quad (6.121)$$

złożenie modeli stanowych: rozszerzenie liczby wejść (rys. 6.15)

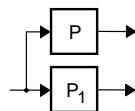
$$P_2 = (P, P_1) : \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D} & \mathbf{D}_1 \end{array} \right], \quad (6.122)$$



Rys. 6.15. Złożenie modeli stanowych

złożenie modeli stanowych: rozszerzenie liczby wyjść (rys. 6.16)

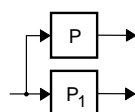
$$P_2 = (P; P_1) : \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 & \end{array} \right], \quad (6.123)$$



Rys. 6.16. Złożenie modeli stanowych

złożenie modeli stanowych z zachowaniem autonomii składowych podsystemów (rys. 6.17)

$$P_2 = (P \# P_1) : \mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 \end{array} \right]. \quad (6.124)$$



Rys. 6.17. Złożenie modeli stanowych

6.6 Zadania do wykonania

W ramach ćwiczenia realizowane są dwa zadania, dotyczące syntezy jednowymiarowych oraz wielowymiarowych układów sterowania liniowymi obiektami (procesami) z czasem ciągłym.

W zadaniu pierwszym wykonywany jest projekt sterownika pracującego na rzecz obiektu jednowymiarowego, opisanego modelem wejściowo-wyjściowym (transmitancyjnym). Model obiektu oraz cel sterowania podaje prowadzący ćwiczenie. Zaleca się stosowanie wcześniej poznanych metod projektowania (metoda modelu, metoda linii pierwiastkowych, metody częstotliwościowe), uzupełnionych wyżej opisanymi regułami Zieglera-Nicholsa.

Zadanie drugie ma charakter projektu wielowymiarowego układu sterowania w oparciu o modele określone przestrzeni stanu. Podobnie jak poprzednio, model obiektu oraz cel sterowania podaje prowadzący ćwiczenie. W ramach projektu rozwiązuje się zagadnienia dotyczące m.in. pozycjonowania biegunów zamkniętego układu sterowania, syntezy obserwatorów stanu (obserwatory o pełnym rzędzie oraz obserwatory zredukowane), syntezy sterowania ze sprzężeniem od estymaty stanu oraz syntezy sterowania optymalnego ze względu na kwadratowe wskaźniki jakości

Wszystkie obliczenia oraz eksperymenty symulacyjne należy wykonywać przy pomocy programu CC.

Zalecana literatura

- Władysław Findeisen: Technika regulacji automatycznej. PWN, Warszawa, 1978.
- Janusz Nowakowski: Projektowanie układów automatycznej regulacji. P.G., Gdańsk, 1979.
- Tadeusz Kaczorek: Teoria układów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa, 1977.
- Tadeusz Kaczorek: Teoria sterowania. Tom I: układy liniowe ciągłe i dyskretne. PWN, Warszawa, 1977.
- Tadeusz Kaczorek: Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa, 1996.
- Friedrich Frohr, Fritz Orthenburger: Wprowadzenie do elektronicznej techniki regulacji. WNT, Warszawa, 1977.
- Henryk Górecki: Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem. PWN, Warszawa, 1971.
- Jakub Gutenbaum: Problemy teorii regulatorów. WNT, Warszawa, 1975.
- W.A. Biesiekierskij: Dinamiczieskij sintiez sistiem awtomaticzieskowo riegulirowanija. Wyd. Nauka, Moskwa, 1970.
- Philippe De Lerminat, Yves Thomas: Automatyka - Układy liniowe. (cz. 3 - Sterowanie). WNT, Warszawa, 1983.
- Antoni Niederliński: Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej (cz. 2 - Zastosowania). WNT, Warszawa, 1977.
- Antoni Niederliński: Systemy i sterowanie. Wstęp do automatyki i cybernetyki technicznej. PWN, Warszawa, 1983.
- Mariusz Nieniewski: Cyfrowa symulacja układów regulacyjnych. PWN, Warszawa, 1978.
- Jerzy Pułaczewski, Krystyna Szacka, Andrzej Manitius: Zasady automatyki. WNT, Warszawa, 1974.
- Karol Rumatowski, Andrzej Królikowski, Andrzej Kasiński: Optymalizacja układów sterowania. Zadania. WNT, Warszawa, 1984.
- Jan Stelmach: Projektowanie przemysłowych układów automatyki. WNT, Warszawa, 1980.
- Ludger Szklarski, Ryszard Koziół: Cyfrowe sterowanie w układach napędów elektrycznych. PWN, Warszawa, 1986. (Jest obszarny fragment o syntezie sterowników z czasem ciągłym).
- Zbigniew Szopliński: Badanie i projektowanie układów regulacji. WNT, Warszawa, 1975.
- Maciej Szymkat: Komputerowe wspomaganie w projektowaniu układów regulacji. WNT, Warszawa, 1993.
- Yasundo Takahashi, Michael J. Rabins, David M. Auslander: Sterowanie i systemy dynamiczne. WNT, Warszawa, 1976.
- Henryk Tunia, Marian P. Kaźmierkowski: Podstawy automatyki napędu elektrycznego. PWN, Warszawa, Poznań, 1983.
- Karol Wais: Linie pierwiastkowe w automatyce. Problemy i zastosowania. WNT, Warszawa, 1973.
- Maciej Szymkat: Komputerowe wspomaganie w projektowaniu układów regulacji. Pomiar Automatyka Kontrola, z.3, ss. 66-71, 1994, WNT, Warszawa, 1993.
- A. Frank D'Sousa: Design of Control Systems. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Paul H. Lewis, Chang Yang: Basic control system engineering. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

Someshwar C. Gupta, Lawrence Hasdorff: Fundamentals of Automatic Control. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.

Jack Golten, Andy Verwer: Control system design and simulation. McGraw-Hill Book Company, London, 1991.

Victor J. Bucek: Control systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

Peter M. Thompson: Program CC, version 4. System Technology, Inc., 1988/9.

Charles L. Philips, Royce D. Harbor: Feedback control systems. Prentice Hall International Inc.

Katsuhiko Ogata: Modern control engineering. Prentice Hall International Inc.

Stefani Savant, Shahian Hostetter: Design of feedback systems. Saunders College Publishing, Fort Worth, Philadelphia, 1993