Ćwiczenie 63

Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyn i ich układów

63.1. Zasada ćwiczenia

W ćwiczeniu określa się współczynnik sprężystości pojedynczych sprężyn i ich układów, mierząc wydłużenie sprężyn pod wpływem znanego obciążenia oraz okres drgań obciążonych sprężyn.

63.2. Wiadomości teoretyczne

Pod wpływem działających sił zewnętrznych każde ciało stałe odkształca się, zmieniając swoją objętość i kształt. W czasie, gdy ciało jest odkształcone, siły zewnętrzne są równoważone siłami reakcji sprężystych ciała, które dążą do przywrócenia jego pierwotnej postaci.

Przyjmiemy dalej, że rozważane ciało ma stały przekrój poprzeczny (np. pręt, drut, sprężyna), a zewnętrzna siła $\vec{F}$ jest skierowana wzdłuż podłużnej osi ciała, powodując jego wydłużenie lub skrócenie o wartość x. Zachodzi wówczas związek:

$$F = kx, \tag{63.1}$$

gdzie współczynnik k, mający wymiar $[k] = \mathrm{N/m}$, nazywa się współczynnikiem sprężystości ciała. Jego wartość liczbowa jest równa wartości siły, powodującej wydłużenie lub skrócenie ciała o jednostkę długości. Zależność (63.1) stosuje się jedynie dla ograniczonego zakresu działających sił, nie przekraczających tzw. granicy proporcjonalności.

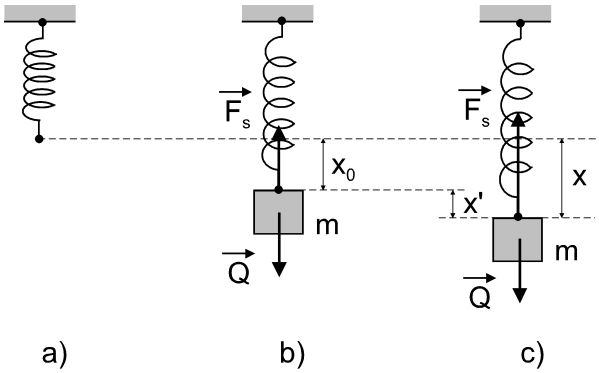
W przypadku sprężyny jej współczynnik sprężystości wyraża się wzorem:

$$k = \frac{Gr^4}{4NR^3} \tag{63.2}$$

(np. [1]), gdzie r jest promieniem drutu sprężyny, N — liczbą jej zwojów, R — promieniem sprężyny, natomiast G — tzw. modułem sztywności (lub modułem Kirchhoffa) materiału sprężyny o wymiarze $[G] = \mathrm{N/m^2}$. Moduł sztywności jest jednym z podstawowych parametrów charakteryzujących własności sprężyste danego materiału, niezależnym od rozmiarów i kształtu ciała.

Współczynnik sprężystości k sprężyn można łatwo wyznaczyć doświadczalnie. Gdy na końcu sprężyny zawiesimy ciało o znanej masie m, zostanie ona rozciągnięta pod wpływem ciężaru ciała

$$Q = mg \tag{63.3}$$



Rysunek 63.1. a) Sprężyna bez obciążenia, b) obciążona sprężyna w położeniu równowagi, c) obciążona sprężyna wychylona z położenia równowagi

(g — przyspieszenie ziemskie) o długość x_0 (rys. 63.1a, b). Siła ciężkości $\vec{Q}$ jest wtedy równoważona przez siłę reakcji $\vec{F}_s$ rozciągniętej sprężyny. Kładąc we wzorze (63.1) $F = Q$ i $x = x_0$, otrzymujemy wzór, pozwalający obliczyć współczynnik sprężystości:

$$k = \frac{mg}{x_0}. \tag{63.4}$$

Gdy następnie wychylimy ciało w kierunku pionowym z położenia równowagi i puścimy swobodnie, zacznie ono wykonywać drgania (rys. 63.1c). Wówczas siła reakcji $\vec{F}_s$ sprężyny i siła ciężkości $\vec{Q}$ nie równoważą się (o ile $x \neq x_0$). Wartość wypadkowej tych sił wyraża się wzorem:

$$F_w = Q - F_s, \tag{63.5}$$

gdzie wartość siły reakcji $F_s = F$ określa wzór (63.1). Korzystając ze wzorów (63.3) – (63.4) i oznaczając wychylenie ciała z położenia równowagi jako

$$x' = x - x_0, \tag{63.6}$$

wypadkową siłę działającą na ciało można wyrazić wzorem:

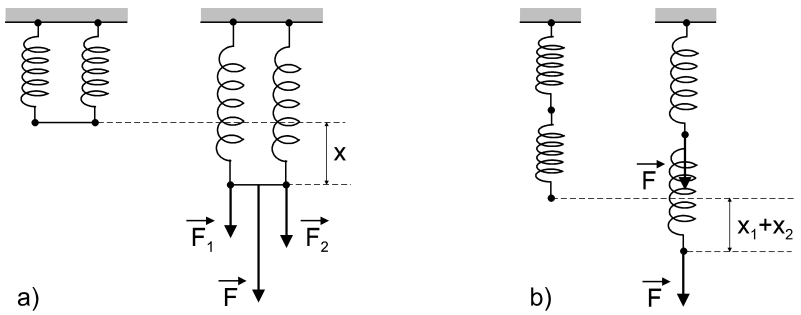
$$F_w = -kx'. \tag{63.7}$$

Znak „−” we wzorze wskazuje, że jest ona skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia ciała. Wiadomo, że ruch ciała na skutek działania siły określonej wzorem (63.7) jest ruchem harmonicznym prostym, przy czym okres drgań ciała wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{63.8}$$

Współczynnik sprężystości można więc obliczyć ze wzoru:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \tag{63.9}$$



Rysunek 63.2. Połączenie sprężyn: a) równoległe, b) szeregowe

Otrzymane wzory stosują się przy założeniu, że można zaniedbać siłę oporu powietrza, jak również masę sprężyny w porównaniu z masą ciała.

Sprężyny można łączyć ze sobą — równolegle lub szeregowo (rys. 63.2). Wypadkowy współczynnik sprężystości k połączonych sprężyn jest zdefiniowany zależnością (63.1), w której F i x oznaczają siłę przyłożoną do układu sprężyn i jego wydłużenie.

W przypadku połączenia równoległego dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 działająca na nie siła jest sumą sił F_1 i F_2, działających na poszczególne sprężyny, a ich wydłużenia są jednakowe. Zachodzą więc zależności:

$$F_1 = k_1 x, \quad F_2 = k_2 x, \quad F = F_1 + F_2, \tag{63.10}$$

z których, uwzględniając zależność (63.1), otrzymuje się związek:

$$k = k_1 + k_2. \tag{63.11}$$

Dla szeregowego połączenia sprężyn działające na nie siły są, przy pominięciu ciężaru sprężyn, jednakowe, natomiast ich łączne wydłużenie jest sumą wydłużeń x_1 i x_2 obu sprężyn. Mamy więc zależności:

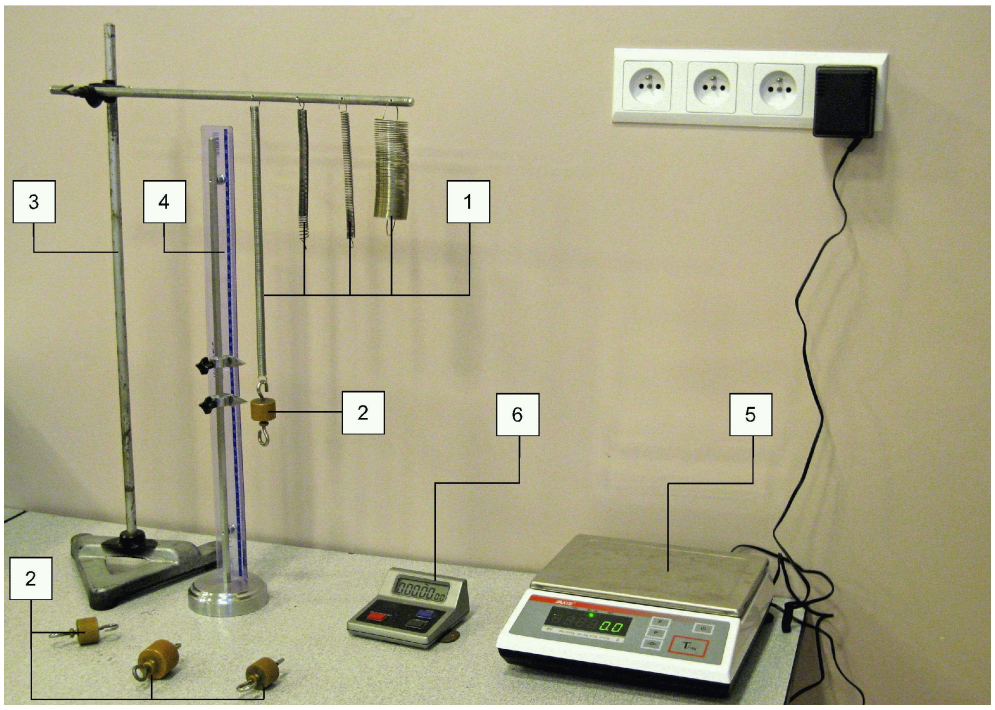
$$F = k_1 x_1, \quad F = k_2 x_2, \quad x = x_1 + x_2, \tag{63.12}$$

z których, po uwzględnieniu zależności (63.1), wynika związek:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{63.13}$$

63.3. Aparatura pomiarowa

W skład używanego w ćwiczeniu zestawu pomiarowego (rys. 63.3) wchodzą: sprężyny, ciężarki i statyw, na którym zawiesza się sprężyny. Do pomiaru wydłużenia sprężyn służy pionowa podziałka z dwiema przesuwanymi wskazówkami. Masę ciężarków wyznacza się przy pomocy wagi, a okres drgań obciążonych sprężyn mierzy się stoperem.



Rysunek 63.3. Zestaw do pomiaru współczynnika sprężystości sprężyn. 1 — sprężyny, 2 — ciężarki, 3 — statyw, 4 — podziałka, 5 — waga, 6 — stoper

63.4. Zadania

1. Wyznaczyć współczynnik sprężystości wybranej sprężyny: a) badając jej wydłużenie pod wpływem zawieszonego ciężaru, oraz b) mierząc okres drgań obciążonej sprężyny. Obliczyć moduł sztywności materiału sprężyny.
2. Wyznaczyć obydwiema metodami współczynnik sprężystości układu dwóch sprężyn, połączonych a) równolegle, b) szeregowo.

63.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

ad 1. Do dolnego końca zawieszonej na statywie sprężyny zaczepiać kolejne ciężarki, mierząc za każdym razem ich łączną masę m oraz wydłużenie x_0 sprężyny. Zapisać w tabelce wartości m i x_0 i sporządzić wykres zależności $x_0 - m$. Jak wynika ze wzoru (63.4), zależność ta powinna przedstawiać w przybliżeniu linię prostą, określoną ogólnym równaniem:

$$Y = A \cdot X + B, \tag{63.14}$$

gdzie $X = m$, $Y = x_0$, $A = g/k$ i $B = 0$. Jeżeli ostatnie punkty na wykresie, odpowiadające największym masom m, odchylają się od zależności prostoliniowej, świadczy to o przekroczeniu granicy proporcjonalności dla danej sprężyny. Wyniki tych pomiarów należy w dalszych obliczeniach pominąć. Wartości parametrów A i B prostej i niepewności S_A i S_B parametrów wyznaczyć metodą regresji liniowej, aproksymując doświadczalną zależność $x_0 - m$ funkcją (63.14). Narysować tę prostą na wykresie. Obliczyć współczynnik sprężystości badanej sprężyny i jego niepewność ze wzorów:

$$k = g/A, \tag{63.15}$$

$$S_k = gS_A/A^2. \tag{63.16}$$

Za wartość przyspieszenia ziemskiego przyjąć $g = 9{,}815$ m/s^2.

W dalszym ciągu tej części ćwiczenia zawieszać na dolnym końcu sprężyny kolejne ciężarki i wprawiać układ w drgania w kierunku pionowym. Mierzyć każdorazowo łączną masę m ciężarków oraz czas t określonej liczby n pełnych drgań (np. $n = 20$) i obliczać okres $T = t/n$ drgań ciężarków. Dla ułatwienia pomiarów należy dobierać stosunkowo duże masy ciężarków, aby okres drgań układu był możliwie długi. Zapisywać w tabelce wartości m, t, T i T^2. Wyniki pomiarów przedstawić na wykresie $T^2 - m$. Ze wzoru (63.9) wynika, że wykres powinien być w przybliżeniu prostoliniowy, a współczynnik kierunkowy prostej powinien wynosić $A = 4\pi^2/k$. Wyznaczyć wartości parametrów A i B prostej (63.14) i ich niepewności S_A i S_B metodą regresji liniowej i narysować prostą na wykresie. Współczynnik sprężystości i jego niepewność obliczyć ze wzorów:

$$k = 4\pi^2/A, \tag{63.17}$$

$$S_k = 4\pi^2 S_A/A^2. \tag{63.18}$$

Kończąc pierwszą część ćwiczenia, określić wartości modułu sztywności G materiału sprężyny. W tym celu zmierzyć średnicę $d = 2r$ drutu sprężyny i średnicę $D = 2R$ sprężyny, odpowiednio za pomocą śruby mikrometrycznej i suwmiarki i obliczyć promienie r i R. Policzyć ilość N zwojów sprężyny. Wartości G i ich maksymalne niepewności ΔG obliczyć z przekształconego wzoru (63.2):

$$G = \frac{4NR^3k}{r^4} \tag{63.19}$$

i ze wzoru:

$$|\Delta G| = G\left(\left|\frac{\Delta N}{N}\right| + \left|\frac{3\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{4\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta k}{k}\right|\right). \tag{63.20}$$

Za niepewność ΔN przyjąć ułamek liczby zwojów, niepewności ΔR i Δr ocenić na podstawie dokładności śruby mikrometrycznej i suwmiarki, a za niepewność współczynnika sprężystości przyjąć $|\Delta k| = 3S_k$.

ad 2. Zmierzyć współczynniki sprężystości k_1 i k_2 dwóch wybranych sprężyn, oraz wypadkowe współczynniki sprężystości k układu tych sprężyn, połączonych równolegle i szeregowo, w podobny sposób jak w punkcie 1. W celu skrócenia czasu pomiarów można je przeprowadzić tylko dla jednej masy m ciężarków. Stosując metodę obciążania sprężyny, należy wówczas obliczać współczynniki sprężystości ze wzoru (63.4),

a przy zastosowaniu metody drgań harmonicznych — ze wzoru (63.9). Maksymalna niepewność współczynników sprężystości, wyznaczonych pierwszą oraz drugą metodą, wynosi odpowiednio:

$$|\Delta k| = k\left(\left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta x_0}{x_0}\right|\right) \tag{63.21}$$

oraz:

$$|\Delta k| = k\left(\left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{2\Delta T}{T}\right|\right). \tag{63.22}$$

Niepewności Δm i Δx_0 ocenić z dokładności przyrządów pomiarowych. Niepewność okresu drgań obliczyć ze wzoru $\Delta T = \Delta t/n$, przyjmując za Δt ułamek sekundy.

Na zakończenie drugiej części ćwiczenia obliczyć wartości współczynników k połączonych równolegle i szeregowo sprężyn ze wzorów (63.11) i (63.13), na podstawie zmierzonych wartości współczynników k_1 i k_2 poszczególnych sprężyn. Maksymalna niepewność współczynnika k dla połączenia równoległego sprężyn jest równa:

$$|\Delta k| = |\Delta k_1| + |\Delta k_2|, \tag{63.23}$$

a dla połączenia szeregowego — równa:

$$|\Delta k| = k^2\left(\left|\frac{\Delta k_1}{k_1^2}\right| + \left|\frac{\Delta k_2}{k_2^2}\right|\right). \tag{63.24}$$

W dyskusji otrzymanych wyników sprawdzić, czy różnice między wartościami współczynników k oraz G, wyznaczonych metodami obciążenia sprężyny i drgań harmonicznych, oraz różnice między wartościami współczynnika k układów sprężyn, określonych doświadczalnie i obliczonych ze wzorów (63.11) i (63.13), mieszczą się w granicach oszacowanych niepewności pomiarowych.

63.6. Wymagane wiadomości

1. Proste odkształcenia sprężystego materiału — rozciąganie i ściskanie, odkształcenie objętościowe i postaciowe, oraz charakteryzujące je współczynniki.
2. Wielkości opisujące ruch harmoniczny prosty.
3. Wyprowadzenie wzoru (63.8) na okres drgań ciała w ruchu harmonicznym prostym.

63.7. Literatura

[1] H. Szydłowski — Pracownia fizyczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
[2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
[3] Cz. Bobrowski — Fizyka — krótki kurs, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.