Ćwiczenie 19

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA PROSTEGO

19.1. Wiadomości ogólne

Na każde ciało umieszczone w pobliżu Ziemi działa, zgodnie z niutonowskim prawem grawitacji, siła powszechnego ciążenia, powodując ruch przyspieszony ciała w kierunku Ziemi (spadek swobodny) z przyspieszeniem g określonym wyrażeniem

$$g = \frac{GM}{r^2}. \tag{19.1}$$

Jest to wektorowa wielkość fizyczna charakteryzująca pole grawitacyjne, czyli pewien obszar przestrzeni wokół masy M, będącej źródłem pola (np. Ziemia), zwana przyspieszeniem grawitacyjnym. Jeżeli w takim obszarze umieścimy inną masę m, to – zgodnie z prawem powszechnego ciążenia – wartość siły wzajemnego oddziaływania jest równa

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{19.2}$$

gdzie G = (6,673 ± 0,003)·10^{-11} m^3 / kg· s^2 – uniwersalna stała przyrody, zwana stałą grawitacji, liczbowo równa sile grawitacji, jaką działają na siebie dwa ciała o jednostkowej masie 1 kg każde z odległości 1 m. Wielkość r jest odległością między środkami tych ciał przy założeniu, że są to masy punktowe lub kule jednorodne.

Parametrem, który jednoznacznie charakteryzuje pole grawitacyjne, jest wektor natężenia pola $\vec{K}$, zdefiniowany jako stosunek siły grawitacji $\vec{F_g}$ do wartości masy punktowej (próbnej) m, a więc liczbowo równy wartości siły $\vec{F_g}$, działającej na jednostkową masę punktową umieszczoną w tym polu:

$$\vec{K} = \frac{\vec{F_g}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{M}{(R+h)^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \tag{19.3}$$

Znak „–” wskazuje, że wektor natężenia pola grawitacyjnego $\vec{K}$ ma zwrot przeciwny do wektora jednostkowego $\vec{r}/r$, tzn. jest skierowany do środka masy M, będącej źródłem pola. Oznacza to, że oddziaływania grawitacyjne mają charakter oddziaływań przyciągających. Ziemię traktujemy jak jednorodną kulę o promieniu R, a wielkość h oznacza wysokość położenia masy m nad powierzchnią Ziemi.

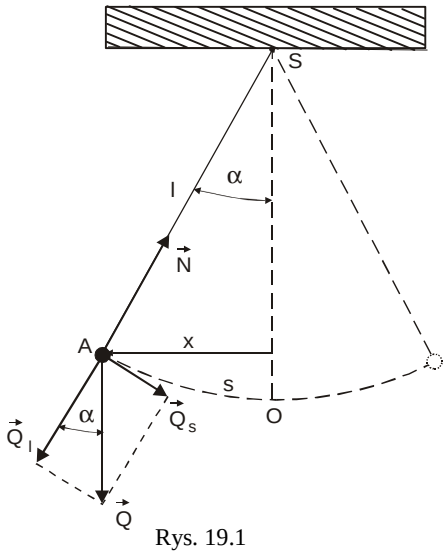
Przyjmując, że na powierzchni Ziemi (h = 0) wartość siły powszechnego ciążenia jest z bardzo dobrym przybliżeniem równa ciężarowi ciała (Q = mg), możemy wyznaczyć w dowolnym punkcie na powierzchni Ziemi wartość przyspieszenia ziemskiego

$$\begin{aligned} G\frac{Mm}{R^2} &= mg, \\ g = G\frac{M}{R^2} &= K. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Przyspieszenie ziemskie o stałej wartości równej 9,81 m/s^2, odpowiadające punktowi leżącemu na 45 stopniu szerokości geograficznej, nazywa się przyspieszeniem normalnym. Tak więc porównanie wyrażeń (19.3) i (19.4) określa jednoznacznie sens fizyczny przyspieszenia grawitacyjnego – jest to wektor natężenia pola grawitacyjnego w dowolnym punkcie tego pola ($\vec{g} \equiv \vec{K}$).

Jednym z najprostszym sposobów wyznaczania przyspieszenia ziemskiego jest pomiar okresu wahań wahadła matematycznego. Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici. Dobrym przybliżeniem wahadła matematycznego jest wahadło proste, czyli niewielkie ciało

(np. kulka o masie m) zawieszone na nici o długości l, przy czym wymiary liniowe kulki są małe w porównaniu z długością nici (rys. 19.1).



Rys. 19.1

Rozpatrzmy ruch wahadła prostego pokazanego na rysunku. Po wychyleniu masy punktowej A z położenia równowagi, siłę ciężkości możemy rozłożyć na dwie siły składowe: Q_l napinającą nić oraz Q_s styczną do toru, wymuszającą ruch okresowy wahadła wokół punktu równowagi O.

Opis ruchu wahadła, niezależnie od tego czy jest to wahadło proste czy fizyczne otrzymujemy z II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego bryły sztywnej

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I},$$

gdzie: $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$ – przyspieszenie kątowe,

$M = mgl \sin\alpha$ – moment siły ciężkości względem punktu zawieszenia,

$I = ml^2$ –jest momentem bezwładności masy punktowej A również względem punktu zawieszenia.

Podstawiając powyższe oznaczenia do (19.5), otrzymujemy równanie opisujące ruch drgający dowolnego wahadła przy dowolnym kącie wychylenia

$$\frac{d\alpha^2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha \cdot \tag{19.6}$$

Znak „–” oznacza, że wektor momentu siły zwrotnej Q_S ma zawsze zwrot przeciwny do wektora przyspieszenia kątowego.

Zakładając małe wychylenie, tzn. takie, że $\alpha \approx \sin\alpha = x/l$, co oznacza również, że długość łuku s jest w przybliżeniu równa wychyleniu ($s \approx x$), otrzymujemy różniczkowe równanie liniowe w postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\,; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}\,, \tag{19.7}$$

gdzie ω_o jest częstością (pulsacją) drgań własnych wahadła prostego.

Jest to równanie ruchu drgającego harmonicznego, którego rozwiązaniem jest funkcja w postaci: $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, a okres drgań T_0 możemy wyznaczyć z zależności

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{19.8}$$

Ze wzoru tego wynika, że okres wahań wahadła prostego zależy od długości nici l i od lokalnej wartości przyspieszenia ziemskiego g, nie zależy zaś od masy punktu A. Ponadto, przy małych kątach wychylenia, okres T_0 nie zależy też od amplitudy x_0 (izochronizm). Przekształcając wzór (19.8) otrzymujemy wyrażenie, z którego można wyznaczyć lokalną wartość przyspieszenia ziemskiego, znając okres wahań T_0 przy ustalonej długości wahadła l:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2}\,. \tag{19.9}$$

Ruch dowolnego wahadła, zarówno prostego, jak i fizycznego, jest harmoniczny jedynie dla małych wychyleń, dla których słuszne jest przybliżenie: $\alpha \approx \sin\alpha$. Dla dużych kątów wychylenia przybliżenie to nie jest słuszne i do analizy takiego ruchu należy posłużyć się pełnym równaniem (19.6)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0\,. \tag{19.10}$$

Równanie (19.10) nie jest równaniem liniowym, a jego rozwiązanie opisuje ruch drgający, ale nie harmoniczny. Okres drgań takiego ruchu drgającego zależy od kąta wychylenia i ma dość złożoną postać

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{\left(2^n\cdot n!\right)^2}\right]^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ T(\alpha) &= T_0\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\ldots\right]. \end{aligned} \tag{19.11}$$

Wyprowadzenie tego wyrażenia czytelnik może znaleźć w podręczniku [3]. Wprowadzając upraszczające oznaczenia kolejnych członów rozwinięcia wyrażenia (19.11)

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad B = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad C = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

otrzymujemy wygodniejszą w obliczeniach postać tego równania

$$T(\alpha) = T_0[\,1 + A + B + C + \ldots]. \tag{19.12}$$

T_0 jest okresem wahań wahadła prostego, wyznaczonym przy jak najmniejszym kącie wychylenia i z maksymalną w warunkach ćwiczenia dokładnością, natomiast wartości trzech pierwszych współczynników rozwinięcia w zależności od kąta wychylenia zawarte są w tabeli 19.1.

Tabela 19.1

Poprawki występujące w rozwinięciu wzoru (19.12)

α	α/2	A	B	C
3	1,5	–	–	–
6	3,0	–	–	–
9	4,5	0,0015	–	–
12	6,0	0,0027	–	–
15	7,5	0,0043	–	–
20	10,0	0,0075	–	–
30	15,0	0,0167	–	–
40	20,0	0,0292	0,0019	–
50	25,0	0,0446	0,0045	–
60	30,0	0,0625	0,0088	0,0015
70	35,0	0,0822	0,0152	0,0035
80	40,0	0,1032	0,0240	0,0069
90	45,0	0,1250	0,0352	0,0122

Wzór (19.9) pozwala wyznaczyć przyspieszenie ziemskie z pomiaru okresu wahań T i długości wahadła l. Pomiar długości wahadła prostego jest dość niewygodny i zazwyczaj obarczony znaczną niepewnością. Możemy ominąć tę trudność, stosując metodę różnicową pomiaru, tzn. dokonując pomiaru okresów wahań wahadła przy ustalonej różnicy długości wahadła. W metodzie różnicowej przyspieszenie ziemskie wyznaczamy ze wzoru

$$g = \frac{4\pi^2}{T_0^2 - T_i^2}\cdot x_i\ , \tag{19.13}$$

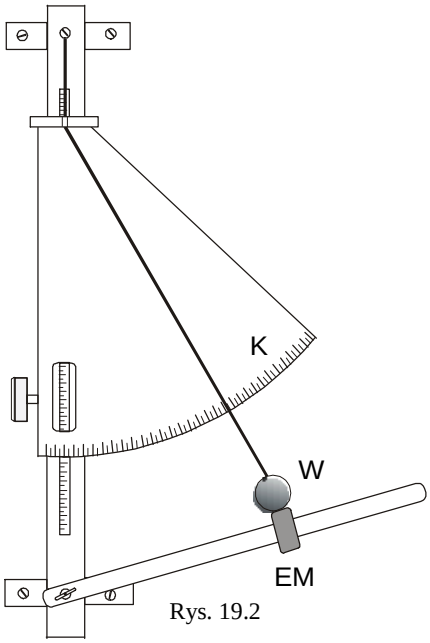
gdzie: $x_i = l_0 - l_i$, a T_0 i T_i – wartości okresów przy dwóch długościach nici wahadła różniących się o x_i i wyznaczonych przy tym samym, początkowym kącie wychylenia α_0, którego wartość określamy z pomiarów w punkcie 2.3.1. Przyjmujemy, że T_0 jest okresem wahań przy możliwie najkrótszej (lub najdłuższej) w warunkach ćwiczenia długości nici l_0.

2.2. Zadania

19.2.1. Zbadać zależność okresu wahań od kąta wychylenia wahadła.
19.2.2. Zbadać zależność okresu wahań od długości wahadła.
19.2.3. Wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne.

19.3. Zasada i przebieg pomiarów

Ćwiczenie wykonujemy za pomocą zestawu pomiarowego pokazanego na rys. 19.2. W skład zestawu wchodzi wahadło proste (W) o zmiennej długości nici, przesuwna skala wraz z kątomierzem (K) oraz elektromagnetyczny mechanizm spustowy (EM).



Rys. 19.2

19.3.1. Pomiar zależności okresu wahań od kąta wychylenia

Ustalamy możliwie najkrótszą długość nici i odchylamy wahadło o ustalony kąt α, blokując wychylenie elektromagnetycznym mechanizmem spustowym, który zapewnia równoczesny start wahadła i sekundomierza, a także stałość płaszczyzny wahań. Mierzymy czas n pełnych wahnięć t_i (np. 20 ÷ 40), zapisując wartość kąta wychylenia początkową (α_0) i końcową (α_n). Okres wahań wahadła T_i oraz średnią wartość kąta wychylenia α_i wyliczamy ze wzorów

$$T_i = \frac{t_i}{n}; \qquad \alpha_i = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \quad . \qquad (19.14)$$

Pomiary powtarzamy dla początkowych wartości kąta wychylenia z zakresu od zera do 60°, przy czym dla małych kątów wartości zmieniamy co 2 lub 3 stopnie, zwiększając stopniowo przedział do 10 stopni w zakresie dużych kątów. Wyniki pomiarów przedstawić na wykresie zależności okresu wahań od średniego kąta wychylenia: $T_i = f(\alpha_i)$, z zaznaczeniem oszacowanych w trakcie pomiarów niepewności. Nanieść na ten sam wykres teoretyczną zależność okresu wahań T wahadła od kąta wychylenia określoną wzorem (19.12), wykorzystując odpowiednie poprawki z tab. 19.1 w taki sposób, aby zapewnić taką samą dokładność w miarę wzrostu wartości kąta wychylenia (tzn. uwzględniając kolejne człony rozwinięcia). Występujący we wzorze (19.12) okres wahań T_0 wyznaczamy przy tej samej, ustalonej wcześniej długości nici.

19.3.2. Wyznaczanie przyspieszenia grawitacyjnego

Wykorzystując wyniki pomiarów w pkt. 19.3.1 ustalamy taką stałą wartość kąta wychylenia wahadła, przy którym ma miejsce izochronizm (okres wahań nie zależy od kąta wychylenia). Zmieniając długość wahadła (np. co 5 ÷10 cm) w zakresie około 60 cm (uzyskamy w ten sposób maksymalnie do 10 – 12 punktów pomiarowych), wyznaczamy okres wahań T_i wahadła z analogicznego wzoru, jak w pkt. 19.3.1. Przekształcając wzór (19.13) do postaci

$$\left|T_0^2 - T_i^2\right| = \frac{4\pi^2}{g} \cdot x_i \tag{19.15}$$

i oznaczając: $y_i = |T_0^2 - T_i^2|$, powyższe wyrażenia sprowadzamy do postaci liniowej: $y_i = a\, x_i$, gdzie parametr prostej $a = 4\pi^2/g$, natomiast x_i jest i-tą różnicą długości wahadła. Korzystając następnie ze wzoru (41), wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej, w przypadku niepełnego równania liniowego.

Przyspieszenie grawitacyjne wyliczamy ze wzoru

$$g = \frac{4\pi^2}{a}\,. \tag{19.16}$$

Wyniki pomiarów oraz oszacowane niepewności nanosimy na wykres $y_i = f(x_i)$ z równoczesnym „wrysowaniem" obliczonej funkcji y = a x. Ponadto liniowa zależność różnicy kwadratów okresów $|T_0^2 - T_i^2|$ od zmiany długości wahadła x_i, jest równocześnie potwierdzeniem niezależności przyspieszenia grawitacyjnego g od długości 1 wahadła prostego (pkt 19.2).

19.4. Ocena niepewności pomiarów

Niepewności pomiarowe w pkt. 19.3.1 szacujemy metodą typu B, uwzględniając wszystkie możliwe w ćwiczeniu czynniki, zgodnie ze wzorem (3) – Wstęp. Oszacowane w ten sposób niepewności maksymalne ΔT i $\Delta\alpha$, nanosimy na wykres doświadczalnej zależności $T_i = f(\alpha_i)$.

Niepewność w wyznaczeniu przyspieszenia ziemskiego (pkt 19.3.2) wynika z metody najmniejszych kwadratów oraz równości niepewności standardowych względnych: przyspieszenia grawitacyjnego i współczynnika kierunkowego prostej

$$\delta_g = \delta_a = \frac{u(a)}{a}\,, \tag{19.17}$$

gdzie u(a) jest niepewnością standardową bezwzględną współczynnika kierunkowego prostej $y = a \cdot x$, obliczoną z wzoru (42) dla niepełnego równania prostej. Bezwzględną niepewność standardową przyspieszenia ziemskiego obliczamy ostatecznie ze wzoru

$$u(g) = g \cdot \delta_g = g \cdot \frac{u(a)}{a}\,, \tag{19.18}$$

gdzie g jest wartością przyspieszenia wyznaczoną w pkt. 19.3.2.

Wynik końcowy pomiaru przyspieszenia ziemskiego podajemy łącznie z niepewnością standardową bezwzględną i względną, zgodnie z zasadami opisanymi we Wstępie.

Literatura

[1] Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. I. Warszawa: PWN 1971.
[2] Massalski J., Massalska M.: Fizyka dla inżynierów, cz. II. Warszawa: WNT 1980.
[3] Kittel C., Knight W. D., Ruderman M. A. Mechanika. Warszawa: PWN 1969.