Ćwiczenie **20**

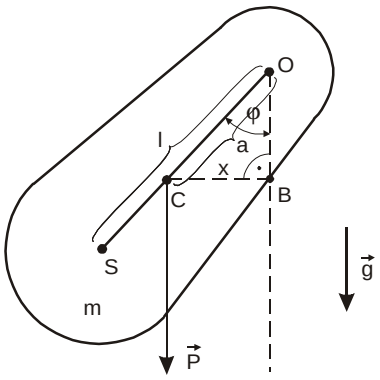
WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO

20.1. Wiadomości ogólne

Wahadłem fizycznym nazywamy ciało sztywne, zawieszone na poziomej osi nie przechodzącej przez jego środek ciężkości (rys. 20.1). Po wychyleniu wahadła z położenia równowagi będzie ono wykonywać drgania pod wpływem siły ciężkości $P = m \cdot g$ (m – masa ciała, g – przyspieszenie ziemskie), przyłożonej w środku ciężkości C wahadła. Jeżeli w danej chwili wahadło jest wychylone o kąt φ, działający na nie moment siły ciężkości względem osi obrotu O wynosi

$$M = -P\,x = -mga\sin\varphi, \tag{20.1}$$

gdzie: x – ramię siły ciężkości,
a – odległość środka ciężkości od osi obrotu.



Rys. 20.1

Znak minus uwzględnia fakt, że moment siły ciężkości powoduje obrót wahadła w kierunku przeciwnym do kierunku jego wychylenia. Wiedząc, że dla małych kątów $\sin\varphi \approx \varphi$ (kąt φ jest wyrażony w radianach), i wprowadzając oznaczenie

$$D = mga \tag{20.2}$$

możemy przepisać wzór (3.1) w postaci

$$M = -D\varphi\,. \tag{20.3}$$

Współczynnik proporcjonalności D w tym wzorze nazywamy momentem kierującym.

Zgodnie z II zasadą dynamiki, ruch obrotowy ciała sztywnego opisuje równanie

$$M = I\,\varepsilon\,, \tag{20.4}$$

gdzie: I – moment bezwładności ciała względem osi obrotu,
$\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ – przyspieszenie kątowe.

Porównując (20.3) i (20.4), otrzymamy równanie

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I}\cdot\varphi, \tag{20.5}$$

które jest równaniem ruchu drgającego o okresie drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,, \tag{20.6}$$

gdzie: D – moment kierujący.

W przypadku wahadła fizycznego D = mga (wzór 20.2), więc okres

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}\,. \tag{20.7}$$

Wprowadźmy teraz wielkość zwaną długością zredukowaną wahadła fizycznego. Długość zredukowana wahadła fizycznego o masie m jest to długość nici 1 takiego wahadła matematycznego, którego okres wahań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{20.8}$$

jest równy okresowi wahań danego wahadła fizycznego, a jego masa jest skupiona w punkcie S (rys. 20.1). Porównując (20.7) z (20.8), otrzymujemy:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{I}{ma}\,. \tag{20.9}$$

Punkt S na prostej OC, znajdujący się w odległości l od osi obrotu (rys. 20.1), nazywamy środkiem wahań wahadła fizycznego.

Moment bezwładności I wahadła fizycznego zależy od odległości a jego środka ciężkości od osi obrotu O. Zgodnie z twierdzeniem Steinera

$$I = I_C + ma^2, \tag{20.10}$$

gdzie: I_C – moment bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez środek ciężkości, równoległej do osi zawieszenia.

Podstawiając (20.10) do (20.7), otrzymamy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ma^2}{mga}} \tag{20.11}$$

co prowadzi do równania

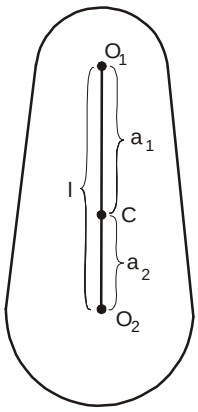
$$4\pi^2 ma^2 - T^2\, mga + 4\pi^2 I_C = 0\,, \tag{20.12}$$

które ma dwa różne pierwiastki określające dwie różne odległości a_1 i a_2 środka ciężkości wahadła od osi obrotu O odpowiadające temu samemu okresowi T wahań wahadła.

Ze wzoru na sumę pierwiastków równania kwadratowego (20.12), otrzymujemy

$$a_1 + a_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2} = l\,, \tag{20.13}$$

a więc suma obu odległości jest równa długości zredukowanej wahadła fizycznego.



Rys. 20.2

Wniosek ten jest podstawą wyznaczania przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego.

Wahadło rewersyjne (odwracalne) jest specjalnym typem wahadła fizycznego pozwalającym na bardzo proste wyznaczenie jego długości zredukowanej l. Wahadło rewersyjne jest bryłą, którą można kolejno zawieszać na dwóch równoległych osiach O_1 i O_2, znajdujących się po przeciwnych stronach środka ciężkości C (rys. 20.2). Odległości a_1 i a_2 ($a_1 \neq a_2$) środka ciężkości C od osi obrotu dobiera się tak, aby okresy wahań wahadła zawieszonego na obu osiach były jednakowe. Jeżeli osie O_1 i O_2 leżą w jednej płaszczyźnie ze środkiem ciężkości wahadła, to długość zredukowana wahadła jest równa odległości między osiami: $l = a_1 + a_2$ (rys. 20.2).

Mierząc okres wahań T tak dobranego wahadła, wyznacza się wartość przyspieszenia ziemskiego na podstawie wzoru (20.8). Ponieważ odległość między punktami O_1O_2 może być ustalona i zmierzona z dużą dokładnością, pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego jest stosunkowo precyzyjny.

20.2. Zadania

20.2.1. Zbadać zależności okresów wahań T_1 i T_2 wahadła rewersyjnego, zawieszonego kolejno na obu osiach, od położenia h ruchomego ciężaru (rys. 20.3).

20.2.2. Sporządzić wykres zależności okresów wahań T_1 i T_2 od położenia h ruchomego ciężaru. Zaznaczyć na wykresie niepewności pomiarów ΔT_1 i ΔT_2. Wyznaczyć z wykresu położenie ciężarka h_o, przy którym $T_1 = T_2$.

20.2.3. Zmierzyć okresy wahań T_1 i T_2 dla położenia h_o. Sprawdzić, czy $T_1 = T_2$ w granicach dokładności pomiarów. W przeciwnym przypadku powtarzać pomiary, zmieniając nieznacznie położenie ciężaru, aż do uzyskania równości okresów $T_1 = T_2$.

20.2.4. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g i oszacować niepewność jego pomiaru.

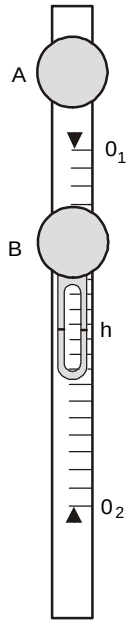
20.3. Zasada i przebieg pomiarów

Najczęściej spotykaną konstrukcją wahadła rewersyjnego jest wahadło Katera (rys. 20.3). Składa się ono z metalowej sztaby, na której osadzone są dwa ciężary o opływowym kształcie i dwóch zwróconych ku sobie, zamocowanych na stałe, metalowych ostrzy O_1 i O_2 stanowiących osie obrotu wahadła. Ciężar B, który można przesuwać wzdłuż wahadła,

zmieniając położenie jego środka ciężkości, znajduje się między ostrzami, a ciężar A – na zewnątrz. Na sztabie nacięta jest skala, która umożliwia odczyt położenia ruchomego ciężaru oraz odległości obu ostrzy.

Z uwagi na przybliżony charakter wzoru (20.8) pomiary należy wykonywać przy małej amplitudzie wahań, nieprzekraczającej wartości kąta wychylenia $\varphi_0 = 5°$.

Rozpoczynając pomiary przesuwamy ruchomy ciężar A jak najbliżej ostrza O_1 i zawieszamy wahadło na jednym z ostrzy, np. O_1. Odczytujemy położenie h ciężaru B i mierzymy czas t_1 liczby n = 20 pełnych wahnięć. Obliczamy okres wahań wahadła $T_1 = t_1/n$. Kontynuujemy pomiary, zwiększając odległość między ostrzem O_1 i ciężarem B co $\Delta h = 5$ cm do momentu, gdy ciężar znajdzie się pośrodku wahadła. Odwracamy wahadło i zawieszamy je na drugim ostrzu, O_2. Wyznaczamy okresy wahań wahadła $T_2 = t_2/n$ dla tych samych położeń h ciężaru B co poprzednio. W celu oszacowania niepewności Δt pomiarów czasów t_1 i t_2 jeden z pomiarów powtarzamy 3–5 razy dla ustalonej wartości h.



Rys. 20.3

Sporządzamy następnie wykres zależności okresów drgań T_1 i T_2 od odległości h (rys. 20.4). Odcięta punktu P przecięcia krzywych określa w przybliżeniu położenie h_o ciężaru, przy którym $T_1 = T_2$. Ustawiamy ciężar B w tym położeniu i wyznaczamy okresy drgań T_1 i T_2 dla n = 100 wahnięć przy zawieszeniu wahadła na ostrzach O_1 i O_2. Sprawdzamy, czy są one równe w granicach niepewności pomiarów ΔT, tj. czy $|T_1 - T_2| \leq 2\Delta T$. Jeżeli różnica okresów T_1 i T_2 jest większa, przesuwamy ciężar o $\Delta h \approx 1$ cm w jedną lub w drugą stronę i powtarzamy pomiary. Dla łatwiejszego określenia właściwego położenia ciężaru nowe rezultaty również nanosimy na wykres, zagęszczając punkty pomiarowe.

Po uzyskaniu zadawalającej zgodności obu okresów drgań obliczamy ich średnią

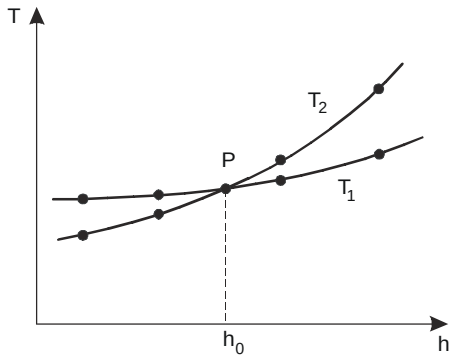
$$T_{śr} = \frac{T_1 + T_2}{2}. \qquad (20.15)$$

Odległość O_1O_2 między ostrzami, równą długości zredukowanej l wahadła podano przy zestawie pomiarowym.

Przyspieszenie ziemskie obliczamy ze wzoru

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_{śr}^2}, \qquad (20.16)$$

który wynika ze wzoru (20.8).



Rys. 20.4

20.4. Ocena niepewności pomiarów

Niepewność Δt pomiarów czasów t_1 i t_2 szacujemy jako niepewność systematyczną (wzór(3) – Wstęp). Niepewność pomiarów okresów wahań T_1 i T_2 oraz ich wartości średniej T obliczamy ze wzoru $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T = \Delta t/n$. Za niepewność pomiaru odległości $l = O_1O_2$ przyjąć $\Delta l = 0{,}5$ mm.

Niepewność pomiaru przyspieszenia ziemskiego obliczamy metodą różniczki logarytmicznej ze wzoru (20.16), jako względną niepewność złożoną (wzór (15) – Wstęp)

$$\delta_g = \left|\frac{\Delta g}{g}\right| = \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + 2\left|-\frac{\Delta T}{T}\right|, \tag{20.17}$$

a bezwzględną niepewność systematyczną Δg w wyznaczaniu przyspieszenia ziemskiego obliczamy ze wzoru

$$\Delta g = \delta_g g \quad . \tag{20.18}$$

Uwagi

1. Wahadło rewersyjne jest ciężkim przyrządem. Dla uniknięcia wypadku lub uszkodzenia wahadła należy podczas pomiarów zachować ostrożność, zwłaszcza przy zmianie jego zawieszenia.
2. W trakcie ćwiczenia wykonuje się prowizoryczny wykres zależności T_1 i T_2 od h. Należy w tym celu zaopatrzyć się w milimetrowy papier i przybory kreślarskie.

Literatura

[1] Massalski J., Massalska M.: Fizyka dla inżynierów, cz. I. Warszawa: WNT 1980.

[2] Szydłowski H.: Pracownia fizyczna. Warszawa: PWN 1973.