Ćwiczenie 21

WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

21.1. Wiadomości ogólne

Każda cząstka obracającego się ciała ma pewną energię kinetyczną. Niech cząstka o masie m znajduje się w odległości r od osi obrotu i ma prędkość $v = \omega r$, gdzie ω jest prędkością kątową promienia wodzącego r cząstki; wówczas jej energia kinetyczna wynosi $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. Całkowita energia kinetyczna ciała równa jest sumie energii kinetycznych wszystkich jego cząstek. Rozpatrujemy ciało sztywne, zatem prędkość kątowa promieni wodzących wszystkich cząstek jest jednakowa ω = const, natomiast promień wodzący r jest zmienny. Energię kinetyczną wirującego ciała zapiszemy więc w postaci

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega^2 . \qquad (21.1)$$

Czynnik $\sum m_i r_i^2$, będący sumą iloczynów mas cząstek przez kwadraty ich odległości od osi obrotu, oznaczamy przez I,

$$I = \sum_{i=i}^{n} m_i r_i^2 , \qquad (21.2)$$

i nazywany momentem bezwładności ciała względem osi obrotu. Moment bezwładności zależy od wyboru osi obrotu, a także od kształtu ciała i sposobu rozłożenia w nim masy.

Dla bryły sztywnej zbudowanej z ośrodka ciągłego o gęstości ρ proces sumowania we wzorze (21.2) zastępujemy całkowaniem, i wtedy

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV , \qquad (21.3)$$

gdzie dm jest nieskończenie małym elementem masy znajdującym się w odległości r od osi obrotu, a całkowanie odbywa się po całej objętości bryły. Całkowita energia kinetyczna obracającego się ciała wyrazi się teraz równaniem

$$E_k = \frac{1}{2} I\,\omega^2 . \qquad (21.4)$$

Jest to wzór analogiczny do wzoru określającego energię kinetyczną w ruchu postępowym. Zauważyć można, że moment bezwładności I w ruchu obrotowym odpowiada masie m w ruchu postępowym, jest więc miarą bezwładności obracającego się ciała.

Ogólnie ruch obrotowy bryły sztywnej opisany jest zależnością

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon} \qquad (21.5)$$

gdzie: $\vec{M}$ – moment sił zewnętrznych, $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ – przyspieszenie kątowe.

Jest to druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Zgodnie z tym podstawowym prawem, wypadkowy moment siły działający na ciało obracające się równy jest iloczynowi momentu bezwładności względem aktualnej osi obrotu i przyspieszenia kątowego bryły.

Porównując wyrażenie (21.5) z II zasadą dynamiki dla ruchu postępowego w postaci $F = m \cdot a$ raz jeszcze daje się zauważyć, że moment bezwładności odgrywa w ruchu obrotowym podobną rolę, jak masa w ruchu postępowym.

21.2. Zadania

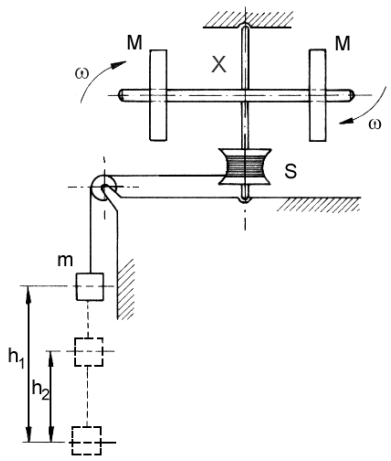
21.2.1. Wyznaczyć moment bezwładności I_0 nieobciążonego pręta.

21.2.2. Znaleźć moment bezwładności I_M dwóch ciężarków o masach M odległych o R od osi obrotu. W tym celu wyznaczyć moment bezwładności I_C poziomego pręta obciążonego ciężarkami M i obliczyć $I_M = I_C - I_0$. Pomiar wykonać dla dwóch różnych wartości R.

21.2.3. Obliczyć niepewności pomiaru wyznaczonego momentu bezwładności ΔI_M.

21.2.4. Wyznaczyć teoretycznie I_M dla obu wartości R z zależności $I_M = 2MR^2$ i porównać z wartością I_M wyznaczoną z pomiaru (pkt 21.2.2).

21.3. Zasada i przebieg pomiarów



Do wyznaczenia momentu bezwładności układu mas X posłużymy się urządzeniem, którego schemat przedstawiono na rys. 21.1. Na szpulę S nawinięty jest sznurek obciążony masą m. W miarę opadania masy m, szpula wraz z badanym układem X zostaje wprawiona w ruch obrotowy. Po przebyciu drogi h_1, masa osiąga najniższe położenie. Ciało X uzyskuje wówczas największą prędkość kątową ω i zaczyna nawijać sznurek, podnosząc masę m, tym razem na wysokość h_2. Na skutek siły oporów ruchu T, $h_2 < h_1$.

Korzystając z zasady zachowania energii, piszemy równanie

$$mgh_1 = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + Th_1, \qquad (21.6)$$

w którym T reprezentuje wszystkie opory ruchu poruszającego się układu.

Ponieważ energia kinetyczna masy m jest znikomo mała w porównaniu z innymi członami (21.6), więc – nie popełniając większego błędu – możemy przyjąć $1/2\ mv^2 \approx 0$. Zamiast (21.6) dostajemy

$$mgh_1 = \frac{I\omega^2}{2} + Th_1 . \qquad (21.7)$$

Podniesienie masy m na wysokość h_2 opisuje również zasada zachowania energii

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgh_2 + Th_2 . \qquad (21.8)$$

Eliminując z (21.7) i (21.8) T, otrzymujemy

$$I = 4mg\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\cdot\frac{1}{\omega^2} . \qquad (21.9)$$

Aby znaleźć ω, mierzymy czas t oraz liczymy ilość n obrotów badanego układu X podczas opadania masy m z wysokości h_1. Ponieważ ruch ten jest jednostajnie przyspieszony, więc

$$\omega = 2\omega_{śr} = 2\frac{2\pi\cdot n}{t} .$$

Ostatecznie mamy

$$I = \frac{mg}{8\pi^2}\cdot\frac{h_1h_2}{h_{śr}}\cdot\frac{t^2}{n^2}, \qquad (21.10)$$

gdzie $$h_{śr} = \frac{h_1+h_2}{2} .$$

21.4. Ocena niepewności pomiarów

Względną niepewność pomiarów δ_I momentu bezwładności nieobciążonego pręta I_0 oraz pręta obciążonego I_C obliczamy metodą różniczki logarytmicznej zastosowaną do wzoru (21.10)

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left(\frac{1}{|h_1|} + \frac{1}{|h_2|} + \frac{1}{|-h_{śr}|}\right)|\Delta h| + 2\left|\frac{\Delta t}{t}\right| + 2\left|-\frac{\Delta n}{n}\right|, \qquad (21.11)$$

w którym niepewności systematyczne Δh, Δt i Δn oszacować metodą typu B (wzór (3) – Wstęp) w trakcie pomiarów. Względną niepewność δ_m w oznaczaniu masy m przyjąć równą 0,01.
Obliczyć niepewność ΔI_M dla układu mas X

$$|\Delta I_M| = |\Delta I_0| + |\Delta I_c| \qquad (21.12)$$

i zbadać, czy różnica między wartością I_M wyznaczoną z pomiarów i obliczoną teoretycznie mieści się w granicach niepewności pomiarów.

Literatura

[1] Jaworski B., Piński A.: Elementy fizyki, t. 1. Warszawa: PWN 1977.
[2] Resnick R., Halliday D.: Fizyka, t. 1. Warszawa: PWN 1983.