Ćwiczenie 22

WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI METODĄ DYNAMICZNĄ GAUSSA

22.1. Wiadomości ogólne

Pod wpływem sił zewnętrznych ciała stałe ulegają odkształceniom tzn. zmieniają swoje wymiary oraz kształt. Jeżeli po usunięciu sił zewnętrznych ciało wraca do pierwotnej postaci, to odkształcenie nazywamy sprężystym. Wielkość siły przypadającej na jednostkę powierzchni odkształcanego ciała jest miarą wywołanych tą siłą naprężeń. Naprężenia wywołane siłą działającą prostopadle do powierzchni (F_n) noszą nazwę naprężeń normalnych: $\sigma = F_n/S$. Siła działająca stycznie do powierzchni odkształcanego ciała (F_t) jest źródłem naprężeń stycznych: $\tau = F_t/S$.

Siły zewnętrzne, powodujące sprężyste odkształcenie ciał, wywołują w ich wnętrzu siły reakcji, równe co do wartości siłom zewnętrznym, które są źródłem wewnętrznych naprężeń sprężystych dążących do przywrócenia odkształcanym ciałom ich pierwotnej postaci. Naprężenia wewnętrzne wywołane odkształceniami sprężystymi są proporcjonalne do względnego odkształcenia:

$$\sigma = K\,\varepsilon, \tag{22.1}$$

gdzie: σ – naprężenie wewnętrzne (normalne lub styczne),

$\varepsilon = \Delta x/x$ – względne odkształcenie, równe stosunkowi odkształcenie bezwzględnego Δx do początkowej wartości wielkości x charakteryzującej wymiary lub kształt ciała,

K – moduł sprężystości, równy naprężeniu powstającemu podczas względnego odkształcenia równego jedności, zależny od rodzaju odkształcenia.

Równanie (22.1) stanowi ogólną postać prawa Hooke'a, którego szczegółowa postać zależy od rodzaju odkształcenia.

Zmiana długości Δl sprężystego pręta o długości początkowej l_0, polu przekroju poprzecznego S, rozciąganego lub ściskanego siłą F

$$\Delta l = \frac{l_0 \cdot F}{E \cdot S} = \frac{l_0}{E}\sigma, \tag{22.2}$$

gdzie: $\sigma = F/S$ – naprężenie normalne,

E – moduł Younga.

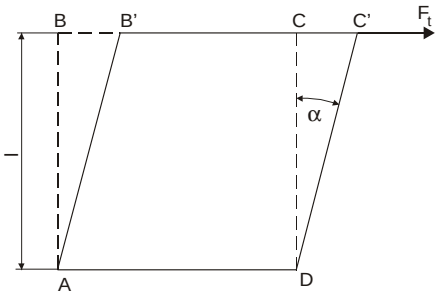
Wywołane tym odkształceniem naprężenia wewnętrzne

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{22.3}$$

są proporcjonalne do względnego odkształcenia pręta $\varepsilon = \Delta l/l_0$:

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{22.4}$$

co jest zgodne z ogólną postacią prawa Hooke'a (22.1).



Rys. 22.1

Zmiana kształtu (odkształcenie postaci), bez zmiany objętości, występuje najczęściej podczas skręcania drutów lub prętów wokół ich osi. Wiąże się to z tzw. odkształceniem przesunięcia prostego (ścinaniem), któremu podlegają poszczególne fragmenty odkształcanego pręta.

Rozważmy fragment odkształcanego pręta w formie elementarnej sześciennej kostki o boku l, do której przyłożono siłę F_t styczną do jednej ze ścian (rys. 22.1). Pod wpływem tej siły zmienia się kształt kostki bez zmiany jej objętości. Powierzchnia BC przesuwa się na odległość BB', czemu odpowiada skręcenie powierzchni AB i CD o kąt α. Dla małych odkształceń kąt ten jest miarą względnego odkształcenia kostki

$$\varepsilon = \frac{BB'}{l} = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha\,, \tag{22.5}$$

będącego źródłem stycznych naprężeń wewnętrznych

$$\tau = \frac{F_t}{S}\,, \tag{22.6}$$

gdzie: S – powierzchnia ściany, wzdłuż której działa siła F_t.

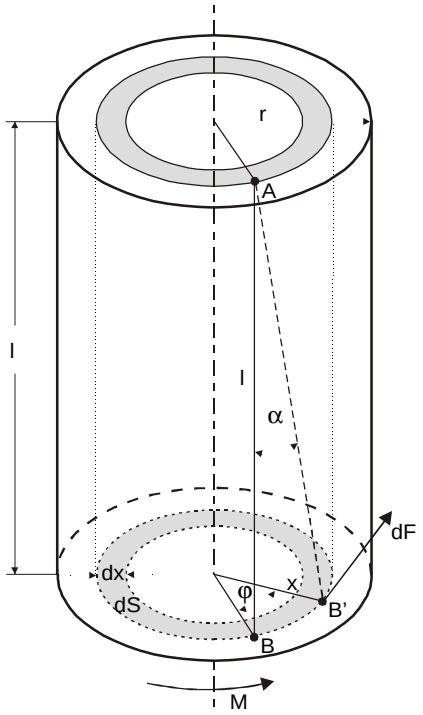
Zgodnie z prawem Hooke'a (22.1), naprężenia te są proporcjonalne do względnego odkształcenia

$$\tau = G\,\alpha\,, \tag{22.7}$$

gdzie: G – moduł sztywności materiału, równy liczbowo naprężeniu stycznemu τ, które spowodowałoby jednostkowe odkształcenie względne.

Całkowite odkształcenie pręta skręconego przyłożonym do jego końca momentem M sił skręcających F_t jest sumą odkształceń jego elementarnych fragmentów.

Rozważmy pręt o długości l i kołowym przekroju poprzecznym o promieniu r, sztywno zamocowany na górnym końcu, któremu do dolnego końca przyłożono skręcający



Rys. 22.2

moment sił M (rys. 22.2). Dla znalezienia związku między modułem sztywności G materiału pręta i moment M sił skręcających, podzielmy pręt na współśrodkowe warstwy w formie rurek o promieniu x i grubości ścianek dx. Na podstawę każdej rurki, czyli na pierścień o promieniu x i szerokości dx, a więc o powierzchni dS = 2πxdx, działa – pochodząca od momentu skręcającego M – siła dF, styczna do obwodu rurki, wywołująca naprężenia styczne

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{2\pi x \cdot dx}. \qquad (22.8)$$

Pod wpływem tych naprężeń poszczególne warstwy ulegną odkształceniom prowadzącym do obrotu ich podstawy o kąt φ, co odpowiada skręceniu pobocznicy o kąt α. Kąty te będą różne dla warstw położonych w różnych odległościach x od osi pręta.

Zgodnie z prawem Hooke'a (22.7) możemy napisać dla danej warstwy

$$\tau = \frac{dF}{2\pi x \cdot dx} = G\alpha. \qquad (22.9)$$

Ponieważ, dla małych kątów

$$\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{BB'}{l} = \frac{\varphi \cdot x}{l}, \qquad (22.10)$$

więc z (22.9) i (22.10):

$$dF = 2\pi G \frac{\varphi}{l} x^2 dx, \qquad (22.11)$$

a moment sił skręcających daną warstwę

$$dM = x\,dF = 2\pi G \frac{\varphi}{l} x^3 dx. \qquad (22.12)$$

Całkowity moment sił skręcających pręt jest sumą momentów sił skręcających poszczególne warstwy

$$M = \int_0^r 2\pi G \frac{\varphi}{l} x^3 dx = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi. \qquad (22.13)$$

Skręcenie sprężyste pręta o kąt φ spowodowane działaniem momentu sił zewnętrznych M wywołało w jego wnętrzu powstanie sił sprężystości, których wypadkowy moment

$$M_S = -M \tag{22.14}$$

stara się przywrócić odkształconemu prętowi jego pierwotną postać. Oznaczając w równaniu (22.13):

$$\frac{\pi G r^4}{2l} = D \tag{22.15}$$

i podstawiając do (22.14), możemy stwierdzić, że moment sił sprężystości wywołany skręceniem sprężystego pręta o kąt φ jest proporcjonalny do tego kąta

$$M_S = -D\varphi\,. \tag{22.16}$$

Z zależności (22.16) wynika możliwość wyznaczenia modułu sztywności G metodą dynamiczną Gaussa, opartą na pomiarze okresu wahań T wahadła torsyjnego, czyli bryły symetrycznej o momencie bezwładności I, zwanej wibratorem, zawieszonej na badanym pręcie. Obracając wibrator, powodujemy skręcenie badanego pręta o kąt φ, co wywoła w jego wnętrzu powstanie sił sprężystości o momencie skręcającym M_S, który działając na wibrator o momencie bezwładności I, wprowadzi go w ruch drgający.

Zgodnie z II zasadą dynamiki ruchu obrotowego

$$M_S = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,, \tag{22.17}$$

gdzie: $d^2\varphi/dt^2$ – przyspieszenie kątowe.

Biorąc pod uwagę (22.16), ruch wibratora możemy opisać równaniem

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I}\varphi\,, \tag{22.18}$$

co jest równaniem ruchu drgającego o okresie drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,, \tag{22.19}$$

gdzie: D – moment kierujący.

Można więc, mierząc okres drgań skrętnych wibratora o momencie bezwładności I, zawieszonego na badanym pręcie, na podstawie (22.19) i (22.15), wyznaczyć moduł sztywności materiału, z którego wykonany jest pręt.

22.2. Zadania

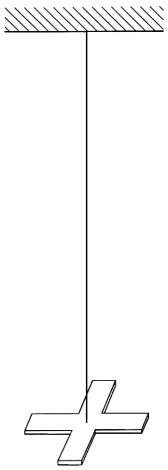
22.2.1. Zmierzyć długości l dwóch drutów.

22.2.2. Zmierzyć śrubą mikrometryczną średnice obu drutów i obliczyć ich promienie r.

22.2.3. Zapisać masy i średnice obu pierścieni obciążających wibrator. Obliczyć promienie: wewnętrzny (R_1) i zewnętrzny (R_2).

22.2.4. Znaleźć okresy drgań skrętnych T_o wibratorów nieobciążonych.
22.2.5. Znaleźć okresy drgań skrętnych T wibratorów obciążonych.
22.2.6. Obliczyć moduły sztywności obu badanych drutów oraz niepewności ich pomiarów.

22.3. Zasada i przebieg pomiarów



Rys. 22.3

Dla wyznaczenia modułu sztywności G badanego drutu metodą dynamiczną Gaussa, mierzymy okres drgań skrętnych T_0 zawieszonego na drucie wibratora nieobciążonego (rys.22.3) o nieznanym momencie bezwładności I_0 oraz okres drgań skrętnych T wibratora obciążonego dodatkowo bryłą o kształcie pozwalającym na łatwe obliczenie jej momentu bezwładności I.

Zgodnie z (22.19), okres drgań skrętnych wibratora nieobciążonego

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}\,, \tag{22.20}$$

a wibratora z dodatkowym obciążeniem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}\,. \tag{22.21}$$

Podnosząc do kwadratu (22.20) i (22.21) i odejmując je stronami od siebie, otrzymamy po przekształceniach

$$D = 4\pi^2 \frac{I}{T^2 - T_0^2}\,, \tag{5.22}$$

co pozwoliło na wyeliminowanie nieznanego momentu bezwładności I_0 wibratora nieobciążonego. Jeżeli wibrator obciążymy pierścieniem o masie m, promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2, to jego moment bezwładności możemy obliczyć ze wzoru

$$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)\,, \tag{22.23}$$

a podstawiając (22.23) do (22.22) i korzystając z (22.15) – możemy wyznaczyć moduł sztywności G badanego drutu

$$G = 4\pi \frac{ml}{r^4} \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{T^2 - T_0^2}\,. \tag{22.24}$$

22.4. Ocena niepewności pomiarów

Niepewność w wyznaczeniu modułu sztywności G obliczamy jako maksymalną niepewność systematyczną wielkości złożonej, metodą różniczki zupełnej (wzór (9) – Wstęp), w odniesieniu do wzoru (22.23). Odpowiednie obliczenia prowadzą do wyrażenia na względną niepewność δ_G

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + 4\left|-\frac{\Delta r}{r}\right| + 2\left|\frac{(R_1 + R_2)}{(R_1^2 + R_2^2)}\,\Delta R\right| + 2\left|-\frac{\Delta T}{T - T_0}\right|, \qquad (22.25)$$

gdzie: Δl, ΔR, ΔT, Δr – systematyczne niepewności pomiarów szacowane metodą typu B w czasie wykonywania pomiarów, natomiast względną niepewność w wyznaczeniu masy przyjąć $\delta_m = 0{,}01$. Niepewność w wyznaczeniu promieni obręczy przyjąć $|\Delta R| = 2\ \text{mm}$.

Końcową postać wyrażenia (22.25) otrzymano przy dodatkowym założeniu, że $\Delta T \cong \Delta T_0$, a w obliczeniach należy przyjąć większą z tych wartości.

Literatura

[1] Szczeniowski Sz.: Fizyka doświadczalna, cz. 1. Warszawa: PWN 1972.
[2] Jaworski B., Piński A.: Elementy fizyki, t. 1. Warszawa: PWN 1977.
[3] Massalski J., Massalska M.: Fizyka dla inżynierów, cz. 1. Warszawa: WNT 1980.