Ćwiczenie 23

BADANIE ELIPSOIDY BEZWŁADNOŚCI BRYŁY SZTYWNEJ ZA POMOCĄ WAHADŁA SKRĘTNEGO

Moment bezwładności I bryły względem wybranej osi jest to wielkość fizyczna będąca miarą bezwładności bryły w jej ruchu obrotowym wokół tej osi, równa sumie iloczynów mas wszystkich cząstek tworzących bryłę i kwadratów ich odległości od osi obrotu.

Dla układu n punktów materialnych sztywno połączonych ze sobą, moment bezwładności

$$I = \sum_i m_i r_i^2 , \qquad (23.1)$$

gdzie: m_i – masa i-tego punktu,

r_i – odległość i-tego punktu od osi, względem której obliczamy moment bezwładności.

Moment bezwładności bryły sztywnej zbudowanej z ośrodka ciągłego o gęstości ρ można wyznaczyć, zastępując sumowanie całkowaniem po całej objętości bryły

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho \cdot r^2 dV , \qquad (23.2)$$

gdzie: r – odległość elementu objętości dV od osi, względem której obliczamy moment bezwładności.

Spośród wszystkich osi przechodzących przez środek masy bryły sztywnej, dwie są wyróżnione: momenty bezwładności bryły względem tych osi przyjmują wartości ekstremalne (względem jednej osi – maksymalny, względem drugiej osi – minimalny). Osie te, wraz z trzecią osią prostopadłą do dwóch pozostałych, nazywamy głównymi osiami bezwładności, a odpowiadające im momenty bezwładności – głównymi momentami bezwładności.

Wybieramy układ współrzędnych o początku O znajdującym się w środku masy badanej bryły i o osiach x, y, z, skierowanych zgodnie z kierunkami głównych osi bezwładności (rys. 23.1). Jeżeli wzdłuż osi x, y, z odłożymy wyrażone w odpowiednich jednostkach odcinki o długościach:

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{I_x}} , \qquad a_y = \frac{1}{\sqrt{I_y}} , \quad a_z = \frac{1}{\sqrt{I_z}} , \qquad (23.3)$$

gdzie: I_x, I_y, I_z – główne momenty bezwładności bryły względem osi x, y, z.

oraz na prostych przechodzących przez początek układu, obrazujących kierunki wszystkich możliwych osi obrotu bryły, odłożymy odcinki o długościach:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{I_i}} , \qquad (23.4)$$

gdzie: I_i – moment bezwładności bryły względem i-tej osi obrotu,

to końce tych odcinków a_i utworzą powierzchnię zamkniętą, opisaną równaniem

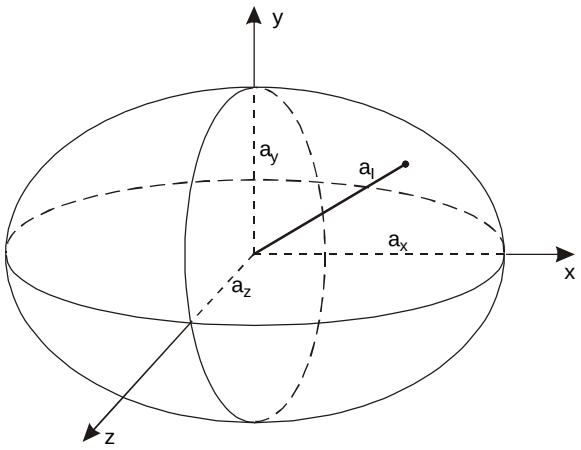
$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1 , \qquad (23.5)$$

lub po uwzględnieniu (23.3)

$$x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z = 1 , \qquad (23.6)$$

zwaną elipsoidą bezwładności. Elipsoida bezwładności jest geometrycznym obrazem zależności momentu bezwładności I_i bryły sztywnej od kierunku i-tej osi obrotu.

Znając kształt elipsoidy bezwładności, można w prosty sposób wyznaczyć moment bezwładności bryły dla dowolnego kierunku osi obrotu. Wystarczy poprowadzić w tym kierunku promień wodzący a_i do przecięcia z powierzchnią elipsoidy bezwładności (rys. 23.1).



Rys. 23.1

Moment bezwładności bryły dla tego kierunku osi

$$I_i = \frac{1}{a_i^2}, \qquad (23.7)$$

gdzie: a_i – długość odcinka a_i wyrażona w tych samych jednostkach, w jakich wyrażono odcinki a_x, a_y, a_z.

Dla znalezienia kształtu elipsoidy bezwładności wygodnie jest posłużyć się wahadłem skrętnym utworzonym z badanej bryły zawieszonej na sprężystym drucie. Skręcanie sprężystego drutu o kąt φ wywoła powstanie w jego wnętrzu sił sprężystości, których moment M_s, zwrócony przeciwnie do momentu sił skręcających, jest proporcjonalny do kąta skręcenia φ (ćwiczenie 22):

$$M_s = -D\,\varphi, \qquad (23.8)$$

gdzie: $D = \pi G r^4/2l$ – moment kierujący,
G – moduł sztywności drutu,
l – długość drutu,
r – promień przekroju poprzecznego drutu.

Moment ten stara się przywrócić skręconemu drutowi jego pierwotną postać i działając na zawieszoną na drucie bryłę, wprawia ją w ruch. Zgodnie z II zasadą dynamiki ruchu obrotowego

$$M = I \cdot \varepsilon, \qquad (23.9)$$

gdzie: M – moment siły działającej na bryłę;
I – moment bezwładności bryły,
$\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ – przyspieszenie kątowe bryły,

i ruch bryły opisany będzie równaniem

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D \cdot \varphi, \qquad (23.10)$$

z którego wynika wyrażenie na okres drgań skrętnych

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \qquad (23.11)$$

Zawieszając badaną bryłę w różnych pozycjach, wywołujemy jej drgania wokół poszczególnych osi, a wyznaczając okres drgań skrętnych, możemy znaleźć moment bezwładności bryły względem badanej osi.

23.2. Zadania

23.2.1. Znaleźć roboczą amplitudę drgań wahadła.

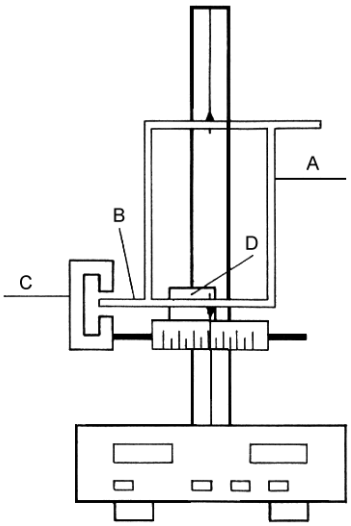
23.2.2. Wyznaczyć okresy drgań skrętnych T_x, T_y, T_z, wokół osi głównych badanych brył oraz okresy drgań T_i wokół wybranych pozostałych osi. Zmierzyć czas 10 drgań powtarzając pomiar nie mniej niż 3 razy dla każdej osi. Dla jednej wybranej osi pomiar powtórzyć 10 razy.

23.2.3. Wyznaczyć okres drgań T_0 pustej ramki. Pomiar powtórzyć 10 razy.

23.2.4. Narysować elipsoidę bezwładności badanej bryły. Pomiary i rysunki wykonać dla dwóch wybranych brył.

23.3. Zasada i przebieg pomiarów

W celu wyznaczenia elipsoidy bezwładności posługujemy się układem przedstawionym na rys. 23.2. Badaną bryłę umieszcza się w ramce (A) zawieszonej na stalowym drucie. Ramka może wykonywać drgania skrętne wokół osi pionowej. Wysięgnik ramki (B) w czasie drgań przecina strumień świetlny czujnika fotoelektrycznego (C) i w ten sposób podawany jest sygnał do milisekundomierza i licznika okresów drgań. Przesuwany wzdłuż skali kątowej elektromagnes (D) służy do unieruchomienia ramki po wychyleniu jej o pewien zadany kąt. Instrukcja obsługi elektronicznego sterownika układu pomiarowego znajduje się na stanowisku pomiarowym.



Rys. 23.2

Dla pustej ramki o nieznanym momencie bezwładności I_0, okres drgań skrętnych

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \,. \qquad (23.12)$$

Po zamocowaniu w ramce badanej bryły o momencie bezwładności względem wybranej osi I_i, okres drgań skrętnych ramki z bryłą

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_i}{D}} \,. \qquad (23.13)$$

Podnosząc do kwadratu (23.12) i (23.13) i odejmując od siebie, otrzymamy

$$T_i^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_i}{D} \,, \qquad (23.14)$$

co pozwala na wyeliminowanie nieznanego momentu bezwładności pustej ramki I_0 oraz na wyrażenie momentu bezwładności badanej bryły I_i przez łatwe do wyznaczenia okresy drgań skrętnych T_i i T_0

$$\sqrt{I_i} = \frac{D}{2\pi}\sqrt{T_i^2 - T_0^2} \,. \qquad (23.15)$$

Kształt elipsoidy bezwładności nie ulegnie więc zmianie, jeżeli na odpowiednich osiach (rys. 23.1) zamiast odcinków a_i odłożymy odcinki o długości

$$a_i' = \frac{1}{\sqrt{T_i^2 - T_0^2}} \,, \qquad (6.16)$$

co prowadzi jedynie do zmiany jednostek, w jakich wyraża się te długości.

Elipsoidę bezwładności przedstawiamy graficznie, rysując jej przekroje w płaszczyznach 0xy, 0xz, 0yz i odkładając wzdłuż kierunku każdej osi odcinki a'_x, a'_y, a'_z oraz a'_{xy}, a'_{xz}, a'_{yz}.

23.4. Ocena niepewności pomiarów

Niepewność standardową $u_C(a)$ wielkości złożonej obliczamy jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych (wzór (28) – Wstęp) w zastosowaniu do wzoru (23.16)

$$u_C(a) = \frac{1}{(T_i^2 - T_0^2)} \sqrt{\frac{(-T_i \cdot u(T_i))^2}{(T_i^2 - T_0^2)} + \frac{(-T_0 \cdot u(T_0))^2}{(T_i^2 - T_0^2)}} \qquad (23.17)$$

gdzie: $u(T_i)$ i $u(T_0)$ – niepewności standardowe obliczane metodą typu A, ze wzoru (24) – Wstęp, odpowiednio dla okresu T_i i T_0

$$u(T) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\overline{T} - T_k\right)^2}{n(n-1)}} \,. \qquad (23.18)$$

Literatura

[1] Sawieliew I. W.: Kurs fizyki, t. 1. Warszawa: PWN 1987.
[2] Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. 1. Warszawa: PWN 1972.
[3] Massalski J., Massalska M.: Fizyka dla inżynierów, cz. I. Warszawa: WNT 1980.