Ćwiczenie **24**

BADANIE PODŁUŻNYCH FAL DŹWIĘKOWYCH W PRĘTACH

24.1. Wiadomości ogólne

24.1.1. Równanie podłużnej fali dźwiękowej i jej prędkość w prętach

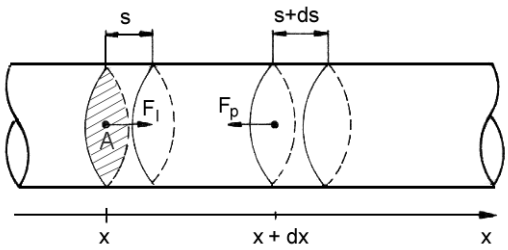
Rozważmy pręt o powierzchni A kołowego przekroju poprzecznego. Wybierzmy kierunek x wzdłuż pręta i weźmy pod uwagę cylindryczny odcinek wycięty przekrojami o współrzędnych x i x + dx (rys. 24.1). Odległość między przekrojami będzie zatem dx. Ponieważ w pręcie biegnie fala podłużna, przekrój A w czasie dt przemieści się o bardzo mały odcinek s. To wychylenie cząstek pręta zależy od x i od czasu t:

$$s = s(x, t)\ . \tag{24.1}$$

Wychylenie cząstek w drugim przekroju będzie:

$$s(x+dx,t) = s(x,t) + ds = s + \frac{\partial s}{\partial x}dx\ , \tag{24.2}$$

(jest to rozwinięcie funkcji s(x + dx, t) w szereg Taylora, przy czym pominięto wyrazy z $(dx)^2$, $(dx)^3$ i wyższych rzędów, bo dx jest małą wielkością).



Rys. 24.1

Z lewej strony na walec zawarty między tymi dwoma przekrojami działa naprężenie σ, a z prawej strony σ + dσ. Zatem siła działająca na cały przekrój z lewej strony będzie

$$F_1 = \sigma \cdot A\ , \tag{24.3}$$

a z prawej strony

$$F_p = (\sigma + d\,\sigma) \cdot A\ . \tag{24.4}$$

Masa odcinka pręta o długości dx, przekroju poprzecznym A i gęstości ρ wyraża się wzorem

$$dm = \rho \cdot A \cdot dx\ . \tag{24.5}$$

Ponieważ przemieszczenie rozważanego przekroju pręta wynosi s, zatem jego przyspieszenie wyniesie

$$a = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\ . \tag{24.6}$$

Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona oraz wzorów (24.3), (24.4), (24.5) i (24.6) możemy zapisać

$$\rho \cdot Adx \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\sigma + d\sigma)A - \sigma A = Ad\sigma \cdot$$

Po skróceniu przez A, otrzymujemy

$$\rho dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = d\sigma\ , \tag{24.7}$$

stąd

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad (24.8)$$

(w równaniu (24.8) piszemy pochodną cząstkową $\partial\sigma/\partial x$, gdyż σ jest funkcją nie tylko x, ale również t).

Skorzystamy teraz z prawa Hooke'a, wiążącego naprężenie σ z wydłużeniem względnym $\Delta l/l$

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0}, \qquad (24.9)$$

gdzie E jest modułem Younga.

W rozważanym przypadku odcinka pręta o długości $l_0 = dx$, wydłużenie wynosi

$$\Delta l = ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx ,$$

czyli

$$l_0 = dx \quad \text{oraz} \quad \Delta l = \frac{\partial s}{\partial x}\cdot dx . \qquad (24.10)$$

Wstawiając wyrażenie (24.10) do równania (24.9), otrzymujemy

$$\sigma = E\frac{\partial s}{\partial x},$$

stąd

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \qquad (24.11)$$

Ostatecznie z równań (24.8) i (24.11) otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \qquad (24.12)$$

które jest równaniem fali sprężystej o ogólnej postaci

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \qquad (24.13)$$

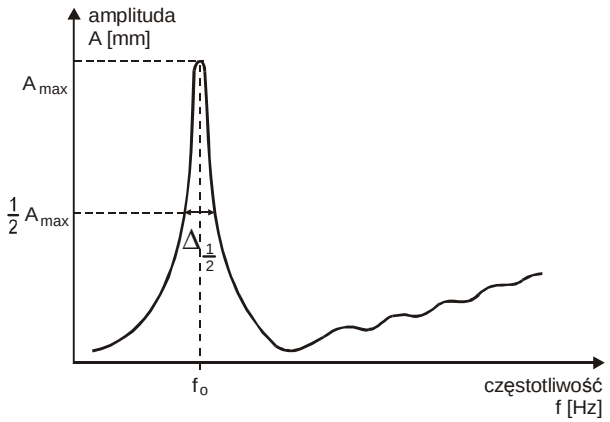
przy czym:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (24.14)$$

jest prędkością rozchodzenia się fali podłużnej w ośrodku, z którego jest wykonany pręt.

24.1.2. Drgania wymuszone pręta zamocowanego w środku. Rezonans

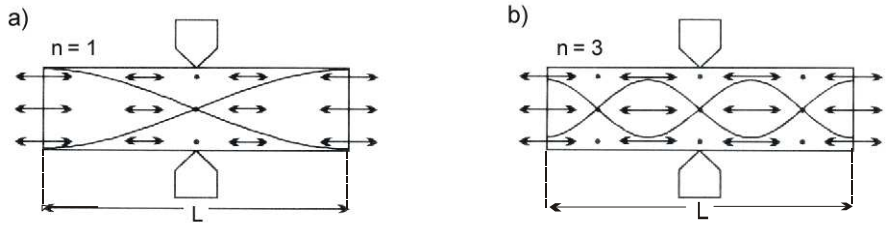
Wymuszając drgania jednego z końców pręta, powodujemy rozchodzenie się w pręcie fali zaburzeń o częstotliwości siły wymuszającej. Obserwując drgania drugiego końca pręta stwierdzamy, że ze wzrostem częstotliwości gwałtownie wzrasta amplituda drgań pręta, osiągając wartość maksymalną przy pewnej częstotliwości f_0. Przy dalszym wzroście częstotliwości siły wymuszającej ma miejsce szybki spadek amplitudy, przechodzący następnie w metastabilny, ale monotonicznie powolny wzrost amplitudy drgań (rys. 7.2). Taki przebieg zmian amplitudy drgań końców pręta w funkcji częstotliwości f siły wymuszającej (krzywa rezonansowa) może być wyjaśniony powstaniem przy częstotliwości f_0, podłużnej fali stojącej o długości fali równej długości pręta (rys. 7.3a). Nieregularny wzrost amplitudy przy wyższych częstotliwościach związany jest z pobudzeniem wyższych harmonicznych podłużnych fal stojących (tzn. takich, przy których długość pręta jest równa odpowiednio trzem, pięciu, siedmiu, ... itd. długościom fali stojącej) oraz stojących fal poprzecznych.



Rys. 24.2

Częstotliwość f_0 nazywamy pierwszą (podstawową) częstotliwością rezonansową dla fal podłużnych w pręcie. Jej wartość posłuży nam do wyznaczenia prędkości fali podłużnej w materiale, z którego wykonano pręt.

Fala stojąca powstaje w pręcie na skutek interferencji fali wymuszonej przez siłę działającą na jeden koniec pręta z falą odbitą od drugiego końca pręta (odbicie od ośrodka rzadszego – bez zmiany fazy). W ten sposób na końcach pręta powstaną strzałki, a w środku pręta węzeł (punkt mocowania jest nieruchomy). Sytuację taką schematycznie przedstawia rys. 24.3a dla drgania podstawowego (n = 1). Rys. 24.3b przedstawia rozkład fali stojącej dla trzeciej harmonicznej (liczba fal stojących w pręcie n = 3).



Rys. 24.3

Długość fali stojącej równa jest połowie długości fali bieżącej λ. Dla pierwszej częstotliwości rezonansowej wyniesie ona

$$\frac{\lambda}{2} = L \cdot \qquad (24.15)$$

Z drugiej strony długość fali λ równa jest ilorazowi prędkości fali v i jej częstotliwości f:

$$\lambda = \frac{v}{f} \cdot \qquad (24.16)$$

Z równań (24.15) i (24.16) dla warunków pierwszego rezonansu otrzymamy

$$v = 2Lf_0 \cdot \qquad (24.17)$$

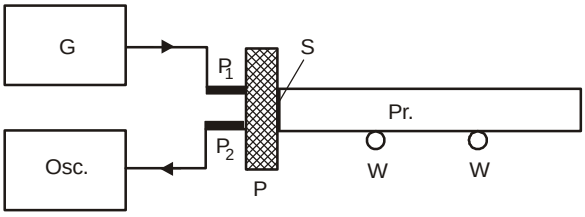
Szerokość połówkowa $\Delta_{1/2}$, tj. szerokość maksimum rezonansowego dla częstotliwości f_0, zmierzona w połowie wysokości tego maksimum (rys.24.2), jest tym większa, im większa jest zdolność tłumienia fal dźwiękowych przez materiał pręta.

24.2. Zadania

24.2.1. Zmierzyć i wykreślić zależność amplitudy drgań od częstotliwości dla każdego z badanych prętów. Wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0.
24.2.2. Wyznaczyć prędkości dźwięku w badanych prętach.
24.2.3. Obliczyć moduły Younga dla tych prętów.

24.3. Zasada i przebieg pomiarów

Prędkość rozchodzenia się fali podłużnej w pręcie wyznaczamy na podstawie wzoru (24.17), posługując się układem pomiarowym przedstawionym schematycznie na rysunku 24.4. Pręt P_r, leżący na elastycznych wspornikach W, które nie tłumią w istotny sposób jego drgań, dotyka częścią czołową, lekko posmarowaną smarem silikonowym (S), powierzchni przetwornika piezoelektrycznego P.



Rys. 24.4

Przetwornik piezoelektryczny składa się z części P_1, przetwarzającej drgania elektryczne o regulowanej częstotliwości z zakresu akustycznego – wytwarzane przez generator G - w drgania mechaniczne, przenoszone za pośrednictwem smaru silikonowego do pręta P_r i wywołujące jego drgania wymuszone oraz z części P_2, która jest detektorem tych drgań.

Amplituda drgań wymuszonych zależy od częstotliwości siły wymuszającej i dla częstotliwości rezonansowej f_0 osiąga wartość maksymalną, odpowiadającą wytworzeniu w pręcie podłużnej fali stojącej o długości równej długości pręta L (rys. 24.3a). Drgania mechaniczne końca pręta przetwarzane są w części P_2 przetwornika piezoelektrycznego P ponownie w drgania elektryczne, których amplituda może być mierzona w jednostkach względnych na skali oscyloskopu Osc.

Zmieniając częstotliwość generatora w zakresie 2 kHz÷20 kHz, szukamy częstotliwości rezonansowej f_0, przy której amplituda sygnału na ekranie oscyloskopu gwałtownie wzrasta. Po wstępnej lokalizacji tej częstotliwości, zmieniamy częstotliwość generatora w niewielkim zakresie w otoczeniu wartości f_0 dla wykreślenia przebiegu krzywej rezonansowej (rys. 24.2). Odczytując z krzywej rezonansowej dokładną wartość częstotliwości f_0, oraz mierząc długość badanego pręta L, możemy ze wzoru (24.17) obliczyć prędkość v rozchodzenia się fal podłużnych w pręcie.

Moduł Younga materiałów, z których wykonano pręty, możemy obliczyć ze wzoru (24.14), przy czym gęstości poszczególnych materiałów wynoszą:

— stal $\rho_1 = 7{,}88 \times 10^3$ kg/m^3,
— miedź $\rho_2 = 8{,}81 \times 10^3$ kg/m^3,
— mosiądz $\rho_3 = 8{,}70 \times 10^3$ kg/m^3,
— plexi $\rho_4 = 1{,}30 \times 10^3$ kg/m^3.

24.4. Ocena niepewności pomiarów

Względne niepewności systematyczne w wyznaczeniu δ_V i δ_E wyznaczamy metodą różniczki logarytmicznej (wzór (15) – Wstęp) w odniesieniu do wzorów odpowiednio: (24.16) i (24.14)

$$\delta_V = \left|\frac{\Delta v}{v}\right| = \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + \left|-\frac{\Delta f}{f}\right| \qquad (24.18)$$

oraz

$$\delta_E = \left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \left|\frac{\Delta \rho}{\rho}\right| + 2\left|\frac{\Delta v}{v}\right|, \qquad (24.19)$$

gdzie: $|\Delta f/f|$ – względna niepewność pomiaru częstotliwości; producent generatora określa na ± 3%,

$|\Delta l/l|$ – względna niepewność pomiaru długości; przy pomiarze przymiarem metrowym $\Delta l = \pm 1$ mm,

$|\Delta \rho/\rho|$ – względna niepewność określenia gęstości materiału pręta; przyjmujemy, że $\Delta\rho = \pm 0{,}01 \times 10^3$ kg/m^3.

Bezwzględne niepewności systematyczne w wyznaczeniu prędkości dźwięku oraz modułu Younga obliczamy ze wzorów

$$\Delta v = \delta_v \cdot v \quad \text{oraz} \quad \Delta E = \delta_E \cdot E. \qquad (24.20)$$

Literatura

[1] Jaworski B., Piński A.: Elementy fizyki, t. II. Warszawa: PWN 1977.

[2] Resnick R., Halliday D.: Fizyka, t. I. Warszawa: PWN 1983.