Ćwiczenie 50

POMIAR OGNISKOWEJ SOCZEWEK METODĄ BESSELA

50.1. Wiadomości ogólne

Soczewką nazywamy ciało przeźroczyste ograniczone dwiema powierzchniami sferycznymi. Prosta przechodząca przez środki krzywizny obu powierzchni zwana jest osią optyczną soczewki. Jeżeli grubość soczewki jest mała w porównaniu z jej promieniami krzywizny, soczewkę nazywamy cienką. Rozróżniamy soczewki skupiające i rozpraszające. Wiązka promieni wychodzących ze świecącego punktu A na osi optycznej soczewki skupiającej po przejściu przez soczewkę zostaje zebrana w punkcie B zwanym obrazem rzeczywistym punktu A (rys. 50.1). Odległości punktu A i jego obrazu B od środka soczewki spełniają zależność zwaną równaniem soczewki

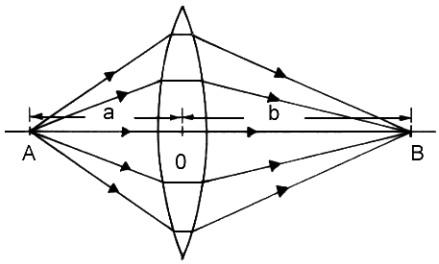
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}, \qquad (50.1)$$

gdzie: a – odległość przedmiotu od soczewki,
b – odległość obrazu od soczewki,
f – ogniskowa soczewki.

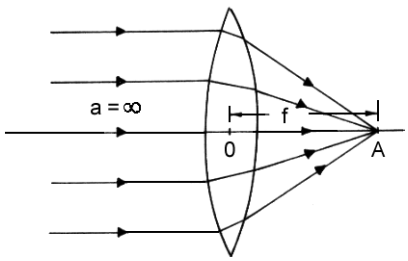
Zależność ogniskowej soczewki od rodzaju materiału i geometrii soczewki wyraża się wzorem soczewkowym

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (50.2)$$

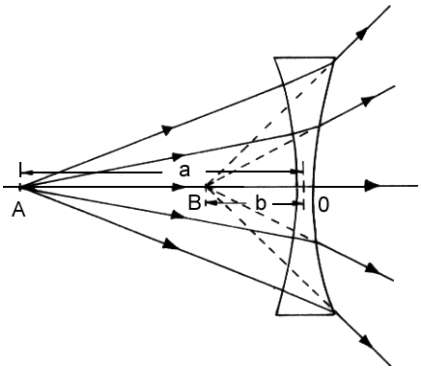
gdzie: n – współczynnik załamania materiału soczewki względem otaczającego ośrodka,
R_1 i R_2 – są promieniami krzywizny powierzchni soczewki.



Rys. 50.1



Rys. 50.2



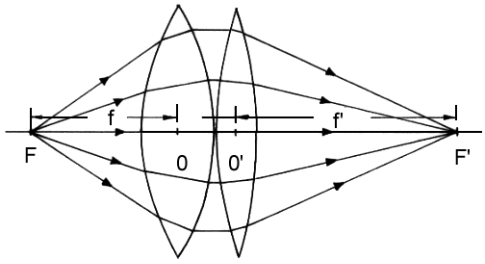
Rys. 50.3

Jeżeli na soczewkę skupiającą pada wiązka promieni równoległych do osi optycznej, co odpowiada nieskończonej odległości przedmiotu ($a \to \infty$), to jak wynika ze wzoru (50.1), obraz powstaje w odległości równej ogniskowej soczewki b = f (rys. 50.2). Punkt skupienia promieni A nazywamy wtedy ogniskiem soczewki. Warunkiem otrzymania obrazu rzeczywistego w soczewce skupiającej jest nierówność a > f. W przypadku soczewki rozpraszającej, obrazem pozornym punktu A nazywamy punkt B leżący na przecięciu przedłużeń promieni rozbieżnej wiązki, wychodzących z soczewki (rys. 50.3). Również soczewka skupiająca daje obraz pozorny, jeżeli a < f. Równania (50.1) i (50.2) są słuszne we wszystkich przypadkach, jeżeli przyjmiemy następującą konwencję dotyczącą znaków odległości: odległość przedmiotu i obrazu rzeczywistego od soczewki uważamy za

dodatnią, a odległość obrazu pozornego – za ujemną. W szczególności ogniskowej soczewki rozpraszającej przypisujemy znak minus, a soczewki skupiającej – plus. Promień krzywizny wypukłej powierzchni soczewki ma wartość dodatnią, a powierzchni wklęsłej – wartość ujemną.

Ogniskową układu f_u dwóch cienkich soczewek, umieszczonych blisko siebie, można obliczyć z równania (50.1), opierając się na geometrii biegu promieni z rys. 50.4. Jak z niego wynika, obraz punktu umieszczonego w odległości a = f od układu soczewek powstaje w odległości b = f'. Tak więc

$$\frac{1}{f_u} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} . \qquad (50.3)$$



Rys. 50.4

Ogniskową soczewki skupiającej można wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (50.1), mierząc odległość przedmiotu od soczewki a oraz odległość obrazu od soczewki b (metoda bezpośrednia). Pomiar tych odległości jest łatwy i dokładny jedynie dla soczewek cienkich. Dla soczewek grubych, a szczególnie dla układu soczewek, wyznaczanie ogniskowej metodą bezpośrednią jest utrudnione i mało dokładne. Główną tego przyczyną jest trudne do określenia położenie ich środka optycznego O, nie zawsze pokrywającego się ze środkiem geometrycznym. Trudności te można ominąć, wyznaczając ogniskową soczewki metodą Bessela.

Przy stałej, odpowiednio dużej odległości przedmiotu od ekranu

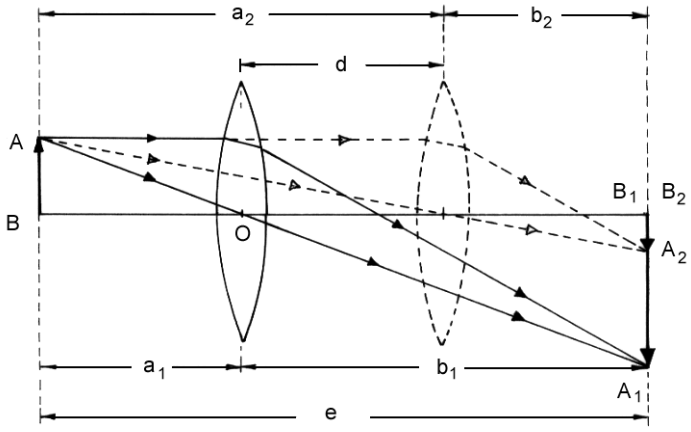
$$e = a + b , \qquad (50.4)$$

istnieją dwa położenia soczewki skupiającej, przy których na ekranie można uzyskać obraz rzeczywisty: powiększony i pomniejszony (rys. 50.5). Mierząc wzajemną odległość tych położeń d oraz odległość przedmiotu od ekranu e, można obliczyć ogniskową soczewki. Z symetrii równania (50.1) wynika, że jeżeli dla pierwszego położenia soczewki odległość przedmiotu od soczewki wynosi a_1, a odległość obrazu od ekranu jest równa b_1, a dla drugiego położenia soczewki odległości te są równe odpowiednio a_2 i b_2, to $a_1 = b_2$ i $a_2 = b_1$. Jak widać z rysunku (50.5), spełnione są zależności

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = e , \qquad (50.5)$$

oraz

$$a_2 - a_1 = b_1 - b_2 = d . \qquad (50.6)$$



Rys. 50.5

Podstawiając (50.4) do (50.1), otrzymamy:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{e-a}=\frac{1}{f}, \qquad (50.7)$$

co prowadzi do równania kwadratowego ze względu na a

$$a^2 - ae + ef = 0 . \qquad (50.8)$$

Równanie to ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy

$$\Delta = e^2 - 4ef > 0 , \qquad (50.9)$$

a więc dla uzyskania na ekranie obrazu ostrego w dwóch położeniach soczewki o ogniskowej f, odległość e ekranu od przedmiotu musi spełniać warunek

$$e > 4f . \qquad (50.10)$$

Położenia te są określone przez pierwiastki równania (50.8)

$$a_1 = \frac{e-\sqrt{e^2-4ef}}{2}, \quad a_2 = \frac{e+\sqrt{e^2-4ef}}{2}. \qquad (50.11)$$

Wstawiając (50.11) do (50.6), otrzymamy

$$d = a_2 - a_1 = \sqrt{e^2-4ef} ,$$

skąd

$$f = \frac{e^2-d^2}{4e} . \qquad (50.12)$$

Ogniskową f_r soczewki rozpraszającej, która nie daje obrazów rzeczywistych, wyznaczamy metodą pośrednią poprzez pomiar ogniskowej f_u układu zestawionego z badanej soczewki rozpraszającej i skupiającej o zmierzonej poprzednio ogniskowej f. Zgodnie ze wzorem (50.3)

$$\frac{1}{f_u}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_r}=\frac{1}{f}-\frac{1}{|-f_r|}, \qquad (50.13)$$

a układ będzie miał właściwości skupiające, tzn. $f_u > 0$, gdy $|-f_r| > f$. Przekształcając wzór (50.13), możemy obliczyć ogniskową soczewki rozpraszającej ze wzoru

$$f_r = \frac{f \cdot f_u}{f - f_u} . \qquad (50.14)$$

Uzupełnieniem i sprawdzeniem uzyskanych wyników może być graficzna metoda wyznaczania ogniskowej: odkładamy na osi x prostokątnego układu współrzędnych (rys. 50.6) odległości przedmiotu od soczewki dla obrazu powiększonego (a_1) i dla obrazu pomniejszonego (a_2), a na osi y odpowiednie odległości b_1 i b_2 obrazu od soczewki. Odpowiednie pary sprzężonych ze sobą punktów a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 łączymy liniami prostymi, które przecinają się w punkcie P. Jak można wykazać, współrzędne punktu P wyznaczają wartość ogniskowej f badanej soczewki.

Z podobieństwa odpowiednich trójkątów (rys. 50.6) wynika

$$\frac{f}{a_1-f}=\frac{b_1}{a_1}, \qquad (50.15)$$

lub

$$a_1 f = a_1 b_1 - b_1 f , \qquad (50.16)$$

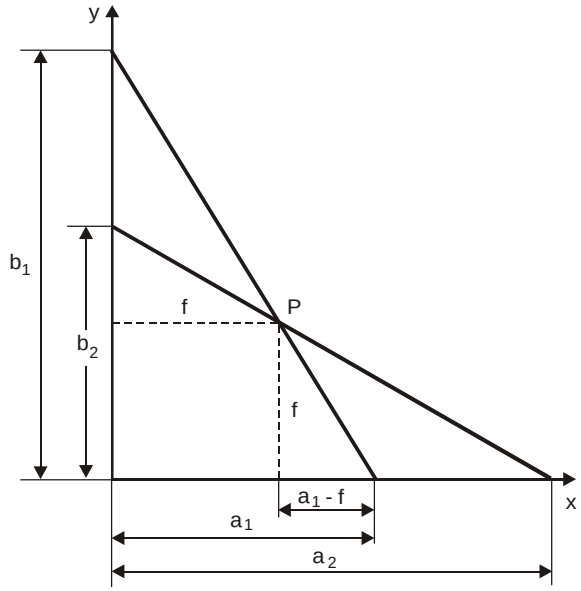
co, po podzieleniu przez $a_1 b_1 f$ i uporządkowaniu prowadzi do równania soczewki (50.1),

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f},$$

a więc zaznaczone na rysunku (50.6) współrzędne punktu P:

$$x_p = f, \quad y_p = f \tag{50.17}$$

są miarą wartości ogniskowej badanej soczewki.



Rys. 50.6

50.2. Zadania

50.2.1. Wyznaczyć ogniskowe dwóch soczewek zbierających metodą Bessela oraz metodą graficzną.
50.2.2. Wyznaczyć ogniskową soczewki rozpraszającej.
50.2.3. Porównać wyniki uzyskane metodą graficzną i metodą Bessela.

50.3. Zasada i przebieg pomiarów

Na ławie optycznej umieszczamy soczewkę zbierającą pomiędzy przedmiotem (oświetlona strzałka) a ekranem, umieszczonym w takiej odległości od przedmiotu, aby można było na nim uzyskać ostry obraz powiększony. Mierzymy odległość ekranu od przedmiotu e, (do metody Bessela) oraz odległości a_1 i b_1 przedmiotu i obrazu soczewki (do metody graficznej). Następnie przesuwamy soczewkę (lub układ soczewek) w położenie, przy którym na ekranie powstanie ostry obraz pomniejszony, i mierzymy przesunięcie soczewki d (do metody Bessela) oraz odległości a_2 i b_2 (do metody graficznej).

Ogniskową soczewki skupiającej obliczamy metodą Bessela (wzór (50.12)) oraz metodą graficzną. W metodzie graficznej odczytujemy obie współrzędne punktu P i obliczamy ogniskową jako ich średnią arytmetyczną:

$$f = \frac{(x_p + y_p)}{2} \tag{50.18}$$

Soczewkę rozpraszającą umieszczamy we wspólnej oprawce z soczewką skupiającą o krótszej ogniskowej, wyznaczamy ogniskową układu soczewek f_u, a następnie, ze wzoru (50.13), obliczamy ogniskową soczewki rozpraszającej f_r.

50.4. Ocena niepewności pomiarów

Niepewność systematyczną pomiaru odległości przedmiotu od ekranu Δe oceniamy na podstawie dokładności skali ławy optycznej (metoda typu B) ze wzoru (3) – Wstęp.

Maksymalną niepewność systematyczną pomiaru przesunięcia soczewki $d = a_2 - a_1$ oceniamy jako

$$|\Delta d| = |\Delta a_1| + |\Delta a_2| . \qquad (50.18)$$

Niepewność pomiaru odległości przedmiotu od soczewki dającej na ekranie ostry obraz powiększony (Δa_1) i pomniejszony (Δa_2) oceniamy jako połowę odstępu pomiędzy skrajnymi położeniami soczewki, przy których odpowiedni obraz zaczyna tracić ostrość.

Niepewność pomiaru ogniskowej f soczewki skupiającej oraz f_u dla układu soczewek wyznaczamy metodą różniczki zupełnej dla niepewności systematycznej wielkości złożonej (wzór (9) – Wstęp)

$$|\Delta f| = \left| \frac{e^2 + d^2}{4e^2} \right| |\Delta e| + \left| \frac{d}{2e} \right| |\Delta d| . \qquad (50.19)$$

Analogicznie postępujemy przy wyznaczaniu niepewności pomiaru ogniskowej soczewki rozpraszającej f_r, otrzymując końcowe wyrażenie w postaci

$$|\Delta f_r| = \left(\frac{f_r}{f} \right)^2 |\Delta f| + \left(\frac{f_r}{f_u} \right)^2 |\Delta f_u| , \qquad (50.20)$$

gdzie: Δf i Δf_u – wartości wyznaczone ze wzoru (50.19).

Literatura

[1] Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. IV. Warszawa: PWN 1983.

[2] Halliday D., Resnick R.: Fizyka, t. II. Warszawa: PWN 1983.