Ćwiczenie 58

WYZNACZANIE MODUŁU YOUNGA METODĄ STRZAŁKI UGIĘCIA

58.1. Wiadomości ogólne

Pod działaniem sił zewnętrznych ciała stałe ulegają odkształceniom, czyli zmieniają kształt. Zmianę odległości między atomami powoduje siła odkształcająca, której przeciwstawiają się siły wewnętrzne. Wypadkowa tych sił, w pewnym zakresie zwanym zakresem sprężystości, jest proporcjonalna do zmian wymiarów ciała. Odkształcenia sprężyste są nietrwałe i znikają, gdy przestają działać siły zewnętrzne. Oznacza to, że po ustaniu działania sił zewnętrznych ciało powraca do pierwotnego kształtu. Po przekroczeniu granicy sprężystości odkształcenia są trwałe. W zakresie sprężystym, zjawisko odkształcenia można opisać za pomocą prawa Hooke'a

$$p = k\alpha, \tag{58.1}$$

gdzie: p – naprężenie zewnętrzne,
α – odkształcenie względne,
k – współczynnik proporcjonalności (moduł sprężystości).

Ściskanie i rozciąganie jest działaniem powodującym podłużne odkształcenie ciała (rys. 2.1). Moduł sprężystości w tym przypadku nazywany jest modułem Younga i oznaczany symbolem E. Prawo Hooke'a opisujące odkształcenie podłużne ma postać

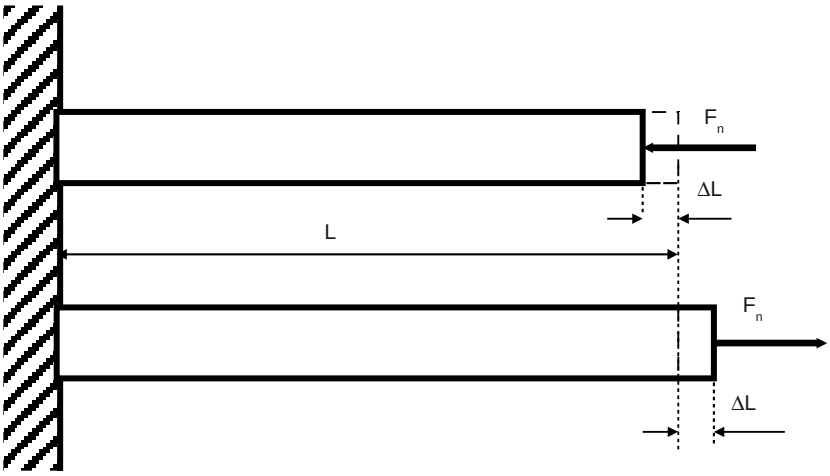
$$\frac{F_n}{S} = E\frac{\Delta L}{L}\ , \tag{58.2}$$

gdzie: S – przekrój poprzeczny pręta,
ΔL – zmiana długości pręta wywołana działaniem siły F_n,
L – długość pręta przy braku naprężeń.

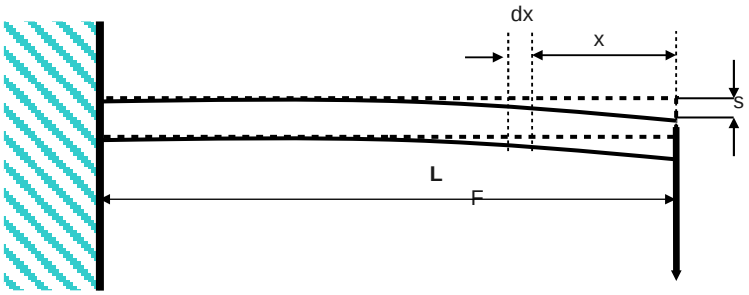
Najprostszy sposób wyznaczania modułu Younga polega na pomiarze przyrostu ΔL pręta o długości L, umocowanego na jednym końcu i rozciąganego przyłożoną do drugiego końca siłą F_n. Ten sposób jest stosowany w przypadku długich i cienkich prętów. Do pomiarów prętów grubych tej metody nie można stosować ze względu na konieczność użycia bardzo dużych sił w celu uzyskania mierzalnych wydłużeń. Dlatego w przypadku grubych prętów korzysta się z efektu zginania (rys. 58.2). Zginanie jest odkształceniem o charakterze złożonym, a jego miarą jest strzałka ugięcia s. Jeżeli sztywno zamocowany na jednym końcu pręt poddany jest działaniu siły F działającej prostopadle do osi pręta na drugim jego końcu, wówczas na każdy poprzeczny element o grubości dx działa moment siły

$$M_x = F \cdot x\ , \tag{58.3}$$

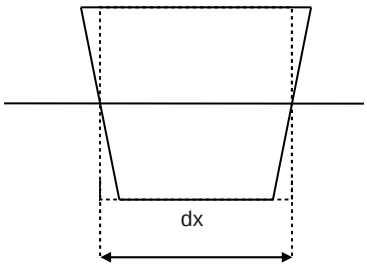
gdzie: x – odległość elementu dx od punktu przyłożenia siły F.



Rys. 58.1



Rys. 58.2



Rys. 58.3

Pod wpływem tego momentu siły element dx ulega odkształceniu (rys.58.3). Górne jego warstwy ulegają wydłużeniu, natomiast dolne skróceniu. Pojawiają się jednocześnie naprężenia ściskające i rozciągające, możliwe do opisu zależnością (58.2). Całkowity efekt zginania, którego miarą jest strzałka ugięcia s, jest wypadkową opisanych powyżej efektów. Strzałka ugięcia s jest to przesunięcie końca pręta wywołane działaniem siły F. Dokładna analiza matematyczna ujmuje związek między E i s w postaci zależności

$$E = \frac{FL^3}{3\,sI_s}\,, \qquad (58.4)$$

gdzie: I_s – powierzchniowy moment bezwładności.

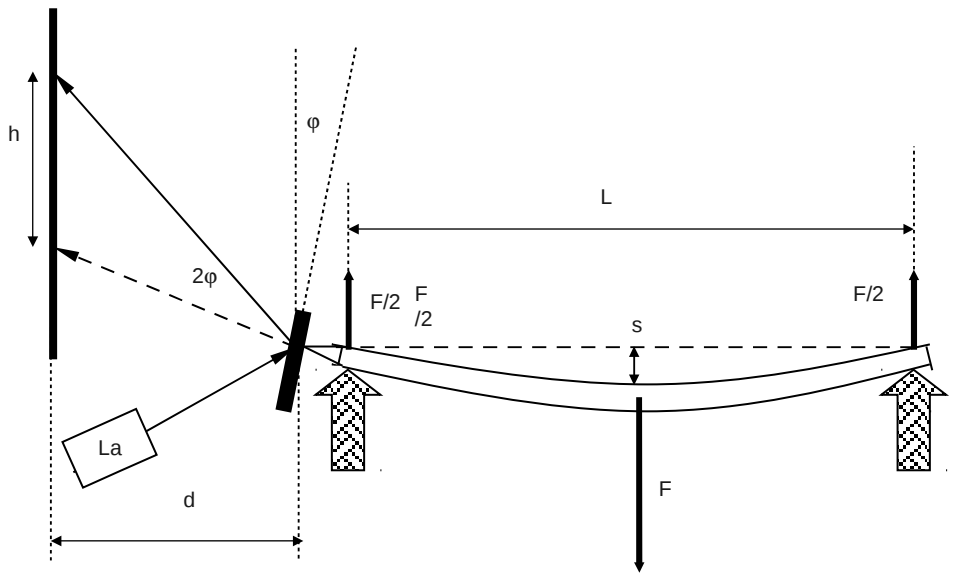
58.2. Zadania

58.2.1. Zmierzyć poprzeczne wymiary badanych prętów oraz określić niepewność pomiaru. Pomiaru dokonać w trzech różnych miejscach pręta.
58.2.2. Zmierzyć rozstaw podpórek L oraz odległość d, czyli drogę, jaką pokonuje promień lasera między lusterkiem M1 i skalą Sk (na rys. 2.6 M1-M2-Sk). Uwaga: celem uproszczenia analizy niepewności pomiarów ustawiać układ tak, aby podczas każdego pomiaru odległość d była taka sama. Określić niepewność wyznaczenia wartości L i d.
58.2.3. Zmierzyć strzałki ugięcia jednego z prętów przy siedmiu różnych obciążeniach. Ocenić niepewność pomiarów. Wykonać wykres h = f(F) (zaznaczając niepewności pomiaru) i ocenić, czy wygenerowane w czasie doświadczenia odkształcenia są z zakresu sprężystości.
58.2.4. Zmierzyć strzałki ugięcia prętów przy jednym obciążeniu (np. około 70%–80 obciążenia maksymalnego). Obliczyć wartość modułów prętów oraz niepewność pomiarów.

58.3. Zasada i przebieg pomiaru

Do pomiaru modułu Younga zastosowano metodę opartą na analizie zginania podpartego na dwóch końcach pręta (rys. 58.4). W tym przypadku efekt ugięcia, reprezentowany przez strzałkę ugięcia s, jest taki sam, jak dla pręta o długości L/2 zginanego siłą F/2. Uwzględniając ten fakt w zależności (58.4), otrzymujemy następujący wzór

$$E=\frac{FL^3}{48\,sI_s}\ . \qquad (58.5)$$



Rys. 58.4

Po obciążeniu pręta oś pręta ulega odchyleniu o kąt φ. Odbity w zwierciadle promień lasera La ulega odchyleniu o kąt 2φ, co odpowiada przesunięciu na skali o odcinek h. Dla małych kątów można przyjąć, że

$$h = 2\varphi d \,, \qquad (58.6)$$

gdzie: d – odległość zwierciadła od skali.

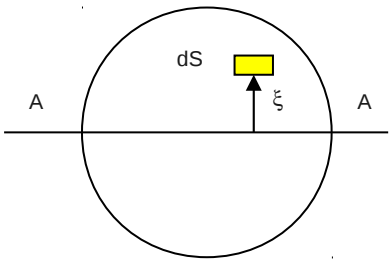
Zakładając, że obciążony pręt jest wygięty w kształcie wycinka okręgu, można pokazać, że jeśli s<<L, to zachodzi związek

$$\varphi = \frac{4s}{L} \,. \qquad (58.7)$$

Na podstawie wzorów (58.5), (58.6) i (58.7) końcowa relacja ma postać

$$E = \frac{FdL^2}{6hI_s} \,, \qquad (58.8)$$

gdzie: I_s – powierzchniowy moment bezwładności.



Rys. 58.5

Powierzchniowy moment bezwładności I_s powierzchni S względem osi AA (rys. 58.5) leżącej na tej powierzchni definiuje się jako

$$I_s = \int \xi^2 dS$$

gdzie: dS – elementarna powierzchnia,
ξ – odległość elementu dS od osi AA.

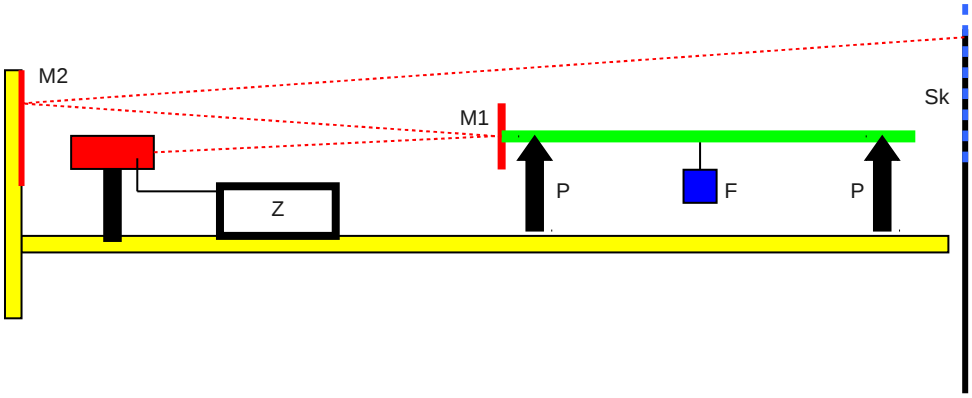
Powierzchniowy moment bezwładności zależy od wielkości i kształtu powierzchni S oraz od położenia osi. W przypadku, gdy oś przechodzi przez środek powierzchni kołowej I_s, wyraża on się wzorem $I_s = \pi\Phi^4/64$, gdzie Φ jest średnicą koła. Dla przekroju kwadratowego, gdy oś AA przechodzi przez środek kwadratu i jest równoległa do jego boku, powierzchniowy moment bezwładności $I_s = a^4/12$ (a – bok kwadratu).

W rzeczywistym układzie, w celu zwiększenia dokładności pomiaru, droga promienia odbitego została wydłużona poprzez dodatkowe odbicie od M2. Badany pręt układamy na wspornikach P (rys. 58.6). Zakładamy na jeden z końców pręta lusterko M1. Pręt i laser tak ustawiamy, aby promień po odbiciu od luster M1 i M2 trafił na skalę Sk. Podwieszając obciążenie F na środku pręta, mierzymy zmiany położenia h plamki na skali.

Maksymalne obciążenia wynoszą:

— pręt stalowy = 5 kg,
— pręt mosiężny = 4 kg,
— pręt aluminiowy pełny = 3 kg,

— pręt aluminiowy pusty = 1,5 kg,
— pręt kompozytowy = 1 kg.
Po wykonaniu pomiarów wyłączyć zasilacz lasera.



Rys. 58.6

2.4. Analiza niepewności pomiaru

Wyniki pomiaru grubości (średnicy) pręta należy uśrednić oraz obliczyć wartość modułu powierzchniowego I_s. Jeśli poszczególne pomiary wymiarów pręta różnią się maksymalnie o niepewność wzorcowania (wartość najmniejszej działki suwmiarki) to niepewność przypadkową zaniedbujemy. Zakładając dodatkowo, że niepewność eksperymentatora jest równa zero, na podstawie wzorów (4) i (6), względną niepewność standardową modułu powierzchniowego obliczamy ze wzoru

$$\frac{S_{I_s}}{I_s} = \frac{4\ \Delta_d a}{\sqrt{3}\,\bar{a}}\ , \qquad (58.9)$$

gdzie: $\Delta_d a$ – wartość najmniejszej działki suwmiarki.

Obliczając ze wzoru (58.8) wartość modułu Younga E, korzystamy z wartości I_s, m, h, d i L. Dlatego przy analizie niepewności pomiaru E musimy uwzględnić ich niepewności standardowe.

S_d, S_L i S_h obliczamy na podstawie wzoru (5), pamiętając, że przy ocenie niepewności eksperymentatora należy uwzględnić trudność odczytu odległości d, odczytu położenia plamki światła laserowego na skali itp.

Podana przez producenta dokładność wykonania odważników o masie m wynosi $S_m = 0{,}005 \cdot m$.

Na podstawie wzoru (6) niepewność standardową wartości modułu Younga obliczamy jako

$$S_E = E\sqrt{\left(\frac{S_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{S_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{S_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2S_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{S_{I_s}}{I_s}\right)^2}\ . \qquad (58.10)$$

Zalecana literatura

[1] Szczeniowski Sz.: Fizyka doświadczalna, cz.I-cz.V. Warszawa: PWN 1972-1983.
[2] Resnick R., Halliday D.: Fizyka 1. I. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1994.
[3] Halliday D., Resnick R.: Fizyka 1. II. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1994.
[4] Sawieliew I. W.: Wykłady z fizyki 1.1-1.3. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1998.