Łódź, 18 kwietnia 2017r.

Dr hab. Aleksandra Orpel
Katedra Analizy Matematycznej
i Teorii Sterowania
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Łódzki

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Hanny Guze "Bifurkacje z łamaniem symetrii w zagadnieniu różniczkowo-funkcyjnym opisującym nieliniowe deformacje biologicznego klastra: metody wariacyjne."

Recenzowana rozprawa dotyczy badania zagadnienia bifurkacji z łamaniem symetrii z wykorzystaniem narzędzi wariacyjnych. Występujące w tytule pojęcie biologicznego klastra rozumianego jako dwuwymiarowy obiekt o elastycznym, wolnym brzegu, zostało wprowadzone w pracy A. Yu. Borisovicha i Hanny Guze w 2007 roku. Geneza tego pojęcia jest związana z analizą zachowania najwyżej usytuowanej części szerszego bieguna powłoki balonu, tzw. spadochronu. Biorąc pod uwagę fakt, iż jego średnica jest istotnie większa niż wysokość, stworzono pewien dwuwymiarowy, matematyczny model opisujący zachowanie "spadochronu". Z modelem tym związane jest odpowiednie nieliniowe równanie różniczko-wo-funkcyjne (zależne od trójki parametrów rzeczywistych), dla którego istnieje klasyczne rozwiązanie radialne. Głównym celem pracy jest pokazanie, że ewolucja jednego z parametrów prowadzi do pojawienia się rozwiązań, które nie mają radialnej symetrii oraz określenie charakteru tej bifurkacji. Metoda stosowana w recenzowanej pracy oparta jest na idei sprowadzenia zagadnienia bifurkacji z łamaniem symetrii ze zbioru rozwiązań radialnych do klasycznego problemu bifurkacji ze zbioru rozwiązań trywialnych i wykorzystania twierdzenia Crandalla - Rabinowitza ([10]). Twierdzenie to było szeroko stosowane w zagadnieniach fizycznych czy biologicznych w pracach A. Yu. Borisovicha, z którym mgr Hanna Guze rozpoczynała badanie biologicznego klastra, jak również w pracach J. Janczewskiej, J. Eschera, M. Ehrnströma i B.-V. Matioca czy J. Eschera i A.-V. Matioca.

Problematyka dotycząca zagadnienia bifurkacji z łamaniem symetrii dla zagadnień z wolnym brzegiem była prezentowane m. in. w pracach A. Friedmana i współautorów takich jak A. Yu. Borisovich, M. A. Fontelos, B. Hu, F. Reitich, J. L. Velázquez.

Niniejsza rozprawa składa się z trzech rozdziałów. Rozdział pierwszy ma charakter pomocniczy i zawiera definicje pojęć oraz twierdzenia wykorzystywane w pracy dokorskiej. Na uwagę zasługuje tu przemyślany dobór przykładów ilustrujących klasyczne pojęcia i wyniki.

Kolejny rozdział poświęcony jest klasycznemu zagadnieniu bifurkacji w nieliniowych równaniach funkcyjnych z parametrem oraz twierdzeniu Crandalla-Rabinowitza. Twierdzenie to jest jednym z głównych narzędzi stosowanych w rozprawie. W pierwszej części tego rozdziału przytoczone zostały (z [4]) informacje dotyczące pojęć takich jak: trywialna rodzina rozwiązań oraz punkt bifurkacji równania $F(x, \lambda) = 0$, gdzie F jest odworowaniem klasy C^1 określonym na iloczynie kartezjańskim $X_\delta(0) \times R_\delta(\lambda_0)$ ($X_\delta(0), R_\delta(\lambda_0)$ są kulami odpowiednio w przestrzeni Banacha X i w $\mathbf{R}$) o wartościach w przestrzeni Banacha Y. Przedstawione zostały tu również warunki konieczne istnienia bifurkacji (stwierdzenia 2.3 i 2.4). Druga część tego rozdziału zawiera twierdzenie Crandalla-Rabinowitza w wersji odpowiedniej dla zagadnienia wariacyjnego, które podaje warunki gwarantujące istnienie punktu bifurkacji i orzeka, iż w dostatecznie małym otoczeniu tego punktu zbiór rozwiązań równania $F(x, \lambda) = 0$, gdzie operator F jest klasy C^r, jest sumą gałęzi trywialnej oraz pewnej krzywej Γ klasy C^{r-2}, przecinających się tylko w punkcie bifurkacji. Następnie opisano zastosowanie redukcji skończenie-wymiarowej typu Lyapunova-Schmidta oraz metody funkcji kluczowej Yu. I. Sapronova. Narzędzia te wykorzystano w pracy w celu uzyskania dokładniejszych informacji dotyczących asymptotyki krzywej Γ (w zależności od parametru bifurkacji) i ustalenia jaki rodzaj zachowania krzywej w otoczeniu punktu bifurkacji występuje w tym przypadku: transkrytyczny, pokrytyczny czy dokrytyczny.

Zasadniczy rezultat rozprawy, przedstawiony w ostatnim rozdziale, oparty jest na części (uzyskanej przez mgr Hannę Guze) wyników opisanych w pracach [16] i [17], których współautorem jest promotor pracy - dr hab. J. Janczewska. Tę część pracy Autorka rozpoczyna od wprowadzenia matematycznego modelu klastra biologicznego, którego stan równowagi reprezentuje dodatnia, 2π−okresowa funkcja r klasy C^{m+2}. Całkowita energia tego obiektu jest opisana przez pewien funkcjonał całkowy E, którego wartość zależy nie tylko od funkcji r, ale również od parametrów reprezentujących elastyczność brzegu, elastyczność jego połączeń oraz własności fizycznych gazu znajdującego się w środku. Badanie istnienia punktów krytycznych funkcjonału E, prowadzi do pytania o istnienie dostatecznie gładkich, $2\pi-$ okresowych rozwiązań dodatnich, dla których pochodna w sensie Frécheta funkcjonału E jest równa zeru, co daje odpowiednie równanie różniczkowo - całkowe. Ograniczając poszukiwanie rozwiązań do funkcji $r(\Theta) \equiv r$ (radialnie symetrycznych) natychmiast uzyskano dla dowolnej pary parametrów $(\omega, \nu) \in R_+^2$ istnienie rodziny $\Gamma^{\omega,\nu} = \{(r_\mu, \tau) : \mu = (\tau, \omega, \nu), \tau \in R_+\}$ radialnie symetrycznych rozwiązań. Dalsze rozważania dotyczą bifurkacji z łamaniem symetrii ze względu na parametr τ określający stosunek współczynnika elastyczności łączeń klastra do współczynnika elastyczności jego brzegu. Problem ten został sprowadzony do klasycznego zagadnienia bifurkacji ze zbioru rozwiązań trywialnych przez wprowadzenie pewnego funkcjonału pomocniczego $\widehat{E}$ i badanie równania nieliniowego (3.11): $\widehat{F}(\varrho, \tau, \omega, \nu) = 0$, gdzie $\widehat{F}$ stanowi pochodną Frécheta funkcjonału $\widehat{E}$. Analiza wybranych własności odwzorowania $\widehat{F}$ (lematy 3.4, 3.5, 3.6 i 3.7) powoliła na wykorzystanie twierdzenia Crandalla-Rabinowitza i uzyskanie punktu bifurkacji $(0, \tau_k)$, gdzie $\tau_k = k^2 - 1$ dla $k \geq 2$, równania (3.11) oraz charakteryzacji zbioru rozwiązań w otoczeniu punktu bifurkacji jako sumy trywialnej gałęzi rozwiązań i pewnej, odpowiednio gładkiej, krzywej Γ sparametryzowanej rzeczywistym parametrem t. Wynik ten (opisany w twierdzeniu 3.3) wraz z faktem, iż zagadnienie bifurkacji z łamaniem symetrii zostało sprowadzone do klasycznego zagadnienia bifurkacji ze zbioru rozwiązań trywialnych, daje tezę głównego twierdzenia rozprawy (twierdzenie 3.2), tj. istnienie rodziny rozwiązań bez własności radialnej symetrii. Następnie, przy zastosowaniu metody funkcji kluczowej, ustalono dokrytyczny charakter bifurkacji i przedstawiono parametryzację tej gałęzi jego rozwiązań w otoczeniu punktu biurkacji za pomocą parametru bifurkacji τ.

Podsumowując stwierdzam, że praca napisana jest starannie a główne wyniki rozprawy, tj. twierdzenia 3.2 oraz 3.8, są bardzo ciekawe i dobrze wpisują się w nurt badań dotyczących problematyki bifurkacji z łamaniem symetrii. Przeprowadzone rozumowania świadczą o dobrym opanowaniu wykorzystywanych narzędzi i rozumieniu problematyki. Punktem wyjścia tej rozprawy doktorskiej był, pochodzący z pracy [8], model pewnego obiektu fizycznego, a zadaniem Autorki było zbadanie tego modelu i analiza jego rozwiązań przy pomocy odpowiednich narzędzi. W moim przekonaniu zadanie to zostało rzetelnie zrealizowane.

Uważam, że rozprawa doktorska Pani mgr Hanny Guze spełnia zarówno ustawowe jak i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Wnioskuję o dopuszczenie Pani mgr Hanny Guze do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A. Cygel