POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Wpłynęło dnia 05.10.2016
L. dz. 97/WFTiMS/SN/2016
Zał. —

dr hab. Agnieszka Kałamajska, prof. UW
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
adres e-mail: A.Kalamajska@mimuw.edu.pl

Warszawa, 1 października 2016

Ocena rozprawy doktorskiej
pt. "Rozwiązania homokliniczne prawie okresowych układów Newtonowskich w R^3 z osobliwościami typu Gordona"
Pana mgr. Roberta Krawczyka

1 Wstępne informacje

Praca pana Roberta Krawczyka, napisana pod kierunkiem pani dr. hab. Joanny Janczewskiej, dotyczy problemu istnienia i krotności rozwiązań w układach Hamiltonowskich drugiego rzędu z potencjałem prawie okresowym. Autor koncentruje się głównie na homoklinicznych układach Newtonowskich w R^3, z potencjałem o osobliwościach wzdłuż pewnej prostej spełniającej warunki typu Gordona.

Tematyka pracy, układy Hamiltonowskie drugiego rzędu z osobliwościami, narodziła się w 1975 roku w jednej z prac Gordona. Problemem tym później zajmowało się wielu matematyków, między innymi wybitny matematyk Paul H. Rabinowitz, oraz P. Caldiroli, L. Jeanjean, M. Nolasco, M. Izydorek oraz J. Janczewskia, jej współpracownik J. Maksymiuk, E. Serra, M. Tarallo, S. Terracini oraz H. Tanaka. Prace wymienionych autorów cieszą się zainteresowaniem i są publikowane w bardzo dobrych czasopismach. Jest to tematyka trudna, ambitna i równocześnie dobrze umotywowana od strony teoretycznej i zastosowań.

Efekt rozprawy to spójne tematycznie trzy rozdziały (poza rozdziałem wstępnym będącym omówieniem wyników), z których pierwszy jest wyczerpującym zebraniem i omównieniem istniejącej wiedzy na temat funkcji prawie okresowych różnego typu, drugi rozdział zawiera główny wynik pracy - dowód istnienia i niejednoznaczności rozwiązań homoklinicznych systemu. Ostatni rozdział zawiera wynik uzupełniający - konstrukcję schematu aproksymacyjnego dla zaburzonego układu Newtonowskiego. Wyniki rozdziałów 2 i 3 poszerzają wyniki dwóch artytułów opublikowanych przez Autora samodzielnie w polskich czasopismach (Annales Polonici Mathematici oraz Banach Center Publications).

Głównymi stosowanymi marzędziami są metody analityczne, wariacyjne i topologiczne, oraz wiedza o funkcjach prawie okresowych w sensie Bohra. Rozprawa wymagała dużej wiedzy i bardzo solidnego technicznego wkładu pracy. Uzyskane wyniki uważam za wartościowy i interesujący wkład w rozwój teorii a podjętą tematykę za trudną, ambitną i będącą w jednym z istotnych nurtów interesujących specjalistów zajmujących się układami równań różniczkowych zwyczajnych.

2 Omówienie rozprawy doktorskiej

2.1 Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa opiera się na wynikach dwóch prac samodzielnych Autora:

[1] R. Krawczyk, A note on an approximative scheme of finding almost homoclinic solutions for Newtonian systems, Banach Center Publ., 101, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw (2014), 107-113.

[2] R. Krawczyk, Homoclinic orbits for an almost periodically forced singular Newtonian system in R^3, Ann. Polon. Math. 114(1) (2015), 29-43.

Równocześnie zawiera merytorycznie nowe wyniki, będące rozszerzeniem i uzupełnieniem wyników wymienionych prac.

Praca składa się ze Wstępu, trzech rozdziałów głównych numerowanych, oraz z bibliografii. Rozdział 1 to wyczerpujące omówienie istniejącej wiedzy na temat funkcji prawie okresowych różnego typu, przy czym wykorzystane w dalszej części będą tylko funkcje prawie okresowe w sensie Bohra. Najobszerniejszą częścią rozprawy jest Rozdział 2, będący uzupełnieniem wyników artykułu [2] i zawierający główny wynik pracy, Twierdzenie 2.9. Dowód głównego twierdzenia jest podzielony na cztery etapy, co ułatwia jego analizę. Każdy etap to seria w większości bardzo szczegółowych faktów pomocniczych. Rozdział 3 to rozszerzone wyniki artykułu [1]. Bibliografia nie jest bardzo obszerna i obejmuje 29 pozycji, co wynika stąd, że rozważania dotyczące podjętej tematyki zaczęły się pojawiać począwszy od 1975 roku. W podrozdziale Oznaczenia mogłoby znaleźć się więcej obiektów, na przykład pojęcie potrzebnej przestrzeni Sobolewa E, czy zbioru Γ, omawianych w Rozdziale 2, zamiast pojęcia należenia do zbioru, obcięcia funkcji, czy lim inf.

Rozdziały zostały zredagowane w sposób spójny tematycznie a organizację pracy oraz dobór źródeł uważam za prawidłowe.

2.2 Główne wyniki, narzędzia pracy

Tematyka rozprawy. W rozprawie rozważany jest układ Newtonowski

$$\ddot{q}(t) + a(t)\nabla W(q(t)) = 0, \quad a : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n,\ W : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \tag{1}$$

gdzie $a(\cdot)$ jest funkcją prawie okresową w sensie Bohra, dodatnią, potencjał $W(\cdot)$ posiada osobliwości wzdłuż prostej l omijającej zero i spełnione są pewne założenia, między innymi warunek typu Gordona określający zachowane potencjału w pobliżu osobliwości. Autor koncentruje się na przypadku $n = 3$ i rozwiązaniach homoklinicznych (spełniających warunek $q(x) = \dot{q}(x) = 0$ dla $x \in \{+\infty, -\infty\}$). Bardziej precyzyjnym pytaniem jest pytanie o rozwiązania, które nawijają się wokół prostej l z dodatnią lub ujemną krotnością

Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla takiego układu stanowi interesujące wyzwanie matematyczne od czasu jednej z prac Gordona z 1975 roku. Wyzwanie podjął między innymi Paul H. Rabinowitz i kilkoro innych matematyków, w tym spośród polskich matematyków M. Izydorek, J. Janczewska, oraz J. Maksymiuk.

Prostszym zagadnieniem jest problem (1) z funkcją $a(\cdot)$ okresową, jak w początkowych pracach Rabinowitza. W przypadku nieokresowej funkcji $a(\cdot)$ problem jest dużo bardziej skomplikowany. Badania w tym kierunku prowadzone były przez P. H. Rabinowitza, P. Caldiroliego, L. Jeanjean, M. Izydorka, J. Janczewską, E. Serra, M. Tarallo, S. Terraciniego w wymiarach $n < 3$, następnie przez H. Tanakę w wymiarach wyższych niż dwa, lecz przy wzmocnionych założeniach na potencjał. Tanaka zaproponował w swoich rozważaniach pewien schemat aproksymacyjny, który pozwala wykorzystywać rozwiązania dla przybliżonych układów z warunkami okresowymi do konstrukcji rozwiązań z warunkami prawie okresowymi.

Rozdział 2. Główny wynik pracy doktorskiej to mocno nietrywialne Twierdzenie 2.9 z rozdziału 2, które mówi, że dla $n = 3$ problem (1) posiada przynajmniej dwa rozwiązania homokliniczne, nawijające się na prostą l odpowiednio z dodatnią i ujemną rotacją. Główna idea polega na generowaniu oraz modyfikacji ciągów Palais-Smale'a funkcjonału

$$I(q) = \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{1}{2} |\dot{q}(t)|^2 - a(t) W(t) \right) dt,$$

rozważanego w klasach Γ^+ i Γ^-, krzywych nawijających się na prostą l odpowiednio dodatnią lub ujemną ilość razy. Stopniowa ich modyfikacja pozwala w ostatnim etapie na konstrukcję takiego ciągu, który jest słabo zbieżny do punktu stacjonarnego funkcjonału I i pozostaje w danej klasie krzywych. Można pokazać, że jest to rozwiązanie homokliniczne. Ze względu na to, że funkcjonał badany jest na całej prostej a nie na odcinku, modyfikacja takich ciągów jest bardzo trudna i bardzo istotnie wykorzystuje prawie okresowość funkcji $a(\cdot)$. W procedurze modyfikacji wykorzystuje się na przykład zasadę wariacyjną Ekelanda, istnienie lokalnie Lipschitzowskiego pseudogradientu dla funkcjonału I, własności funkcji prawie okresowych. W dowodzie Twierdzenia 2.9 Autor bardzo szczegółowo analizuje i łączy wiele technik z prac innych autorów, w tym oczywiście pani promotor.

Mam drobne uwagi krytyczne:

- Niektóre fakty (np. Stwierdzenia 2.5 oraz 2.17) można uzasadnić przez twierdzenie Younga znane w rachunku wariacyjnym;

- W oznaczeniach znalazły się niedociągnięcia, które utrudniają czytanie pracy. Na str. 33 znalazła się definicja przestrzeni E oraz zbioru krzywych $\Lambda \subseteq E$. Tymczasem z dowodu wynika, że Autor cały czas operuje nie przestrzenią E, lecz jej podprzestrzenią, złożoną z krzywych znikających w $+\infty$ oraz $-\infty$. Bez założenia tego faktu na przykład nie można założyć że liczba nawinięć wprowadzona na str. 37 jest liczbą całkowitą, oraz że $\eta(s) \in \Gamma$ na str. 59.

- na str. 59, w dowodzie Twierdzenia 2.41 Autor odwołuje się do bardzo abstrakcyjnego Wniosku 2.37, bez informacji w jaki sposób dokładnie wniosek jest zastosowany. Potrzebna natomiast jest tylko jego bardzo prosta wersja dotycząca funkcji $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$. Tu przyznam, że sporo czasu zabrało mi wyjaśnienie, że abstrakcyjne pojęcie ciągu Palais-Smale'a do konstrukcji na str. 59 nie jest potrzebne a jedynie powyża własność.

- Bez dodatkowych argumentów nie można stosować twierdzenia Lagrange'a, np. na stronach 34 i 43, gdyż nie wiadomo, czy funkcje pomocnicze $\theta(\cdot), \xi^t_m(\cdot)$ są mierzalne. Argument ten można bardzo łatwo ominąć stosując bezpośrednio postać całkową wzoru Taylora;

- Brakuje poglądowej interpretacji bardzo ciekawego Lematu Reprezentacyjnego 2.32;

- Chętnie zobaczyłabym trochę więcej intuicyjnych informacji na temat pojęcia pseudogradientu oraz pola pseudogradientowego na str. 58.

Z kolei Stwierdzenie 2.24 oraz Lemat Reprezentacyjny 2.32 uważam za wyniki nieoczekiwane i bardzo trudne.

Rozdział 3. W tym rozdziale Autor uogólnił twierdzenie o istnieniu rozwiązania prawie homoklinicznego dla równania

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = f(t),$$

otrzymanego wcześniej przez J. Janczewską w wersji z potencjałem okresowym i z rozwiązaniem homoklinicznym. W dowodzie stosowana została technika aproksymacyjna J. Janczewskiej, mająca korzenie w metodach Rabinowitza. Metoda polega na tym, aby aproksymować rozwiązania prawie okresowe poprzez rozwiązania okresowe dla zaburzonych układów Newtonowskich z warunkami okresowymi. Jest to także ciekawy wynik, o potencjalnych możliwościach zastosowań poprzez rozwiązania numeryczne. Tu mam drobną uwagę krytyczną. Zamiast Przykładu 3.9, widziałabym ciekawszy, trudniejszy i z funkcją nieskalarną.

Choć zauważyłam drobne niedociągnięcia dotyczące głównie zredagowania pracy warto zauważyć, że sam problem jest bardzo trudny a analiza funkcjonałów postaci $\int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx$ z funkcją f nieciągłą to ogólnie bardzo trudny problem w rachunku wariacyjnym. Stosowane są nowoczesne metody topologiczne (aparat pseudogradientów, ciągi Palais-Smale'a, obserwacja niezmienników homotopijnych - liczby nawinięć), oraz nowoczesna wiedza o funkcjach prawie okresowych. Seria szczegółowych i żmudnych dowodów zakończyła się mocno nietrywialnym wynikiem, wnoszącym nowy i ciekawy wkład do dziedziny.

3 Konkluzja

Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, po przedstawieniu zarówno pozytywnych jak i negatywnych aspektów oceny, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Roberta Krawczyka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

Agnieszka Kałamajska

Agnieszka Kałamajska