

Wpłynęło dnia 07.05.2013
L. dz. 23/WFT:MS/SN/2013
Zał. —

Marek Galewski, dr hab., prof. PŁ
Zakład Modelowania Matematycznego
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
Wólczańska 215, 90-924 Łódź

Opinia o rozprawie doktorskiej

"Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym"

Pana **mgra Karola Wrońskiego**

Praca doktorska mgra Karola Wrońskiego składa się z trzech rozdziałów: wstępnego zawierającego wyniki pomocnicze (w tym również własne a nie jedynie cytowane), rozdziału opisującego regularność słabych rozwiązań ogólnych równań eliptycznych typu anizotropowego oraz rozdziału dotyczącego rozwiązalności i regularności rozwiązań heteroklinicznych dla zagadnienia Allena-Cahna z nieliniowością ogólniejszego typu niż opisywane w literaturze oraz anizotropowym operatorem typu eliptycznego. Rozprawę kończy Podsumowanie opisujące możliwe do uzyskania, w oparciu o wyniki rozprawy, dalsze rezultaty. Podsumowanie, w mojej opinii, zawiera dobry program badawczy pozwalający na wykorzystanie otrzymanych wyników do innego typu zagadnień.

Napisanie rozprawy dotyczącej regularności słabych rozwiązań wymagało głębokiej lektury licznych źródeł oraz odpowiednio finezyjnego użycia istniejących już z literaturze wyników wraz z subtelnymi i dokładnymi oszacowaniami rozmaitych całek. Widać to zwłaszcza w dowodzie twierdzenia 2.1. Uzyskanie twierdzenia 3.1. wymagało dodatkowo zastosowania aparatu metod wariacyjnych. Praca powstała poprzez nietrywialne przeniesienie wyników istniejących w przypadkach prostszych (izotropowych) na przypadki bardziej skomplikowane (anizotropowe). Takie przeniesienie nie jest bezpośrednie, wymaga pomysłowości, którą Autor się wykazał, oraz umiejętnego stosowania aparatu analizy funkcjonalnej. Wyniki dotyczące regularności rozwiązań nie są częste i są konsekwencją żmudnych i precyzyjnych oszacowań. W przypadku anizotropowym pojawiają się rozmaite dodatkowe trudności techniczne wynikające np. z własności anizotropowych funkcji wypukłych. Uzyskane

wyniki dotyczące regularności Autor stosuje do równania Allena-Cahna jako ilustracji, ale należy podkreślić iż są one znacznie ogólniejsze i mogą być zastosowane również do innego typu zagadnień wariacyjnych.

Niestety Autor nie ustrzegł się pisząc pracę usterek, które są jednakowoż łatwe do naprawienia i wydają się wynikać jedynie z nadmiernego pośpiechu przy przygotowywaniu ostatecznej wersji pracy. Wniosek taki nasuwa się stąd, iż rozumowania dalej są poprawne i nie są w żadnym przypadku konsekwencją pojawiających się niedociągnięć. Usterek stosunkowo niewiele jest w rozdziale trzecim, powstałym na bazie pracy [21] autorstwa Pana Wrońskiego opublikowanej w bardzo znaczącym w środowisku matematycznym czasopiśmie *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. Wyniki z rozdziałów wcześniejszych jak się wydaje nie były jeszcze zgłoszone do publikacji. Dodatkowo należy podkreślić iż rozdział trzeci nie jest bezpośrednią kompilacją wyników z pracy [21] ale zawiera ich istotne rozszerzenie na przypadek anizotropowy, jak i analizę regularności rozwiązań słabych.

Moje zarzuty dzielę na trzy grupy:

1. (a) niestotne uwagi formalne;
(b) błędy literowe lub w oznaczeniach;
(c) fragmenty wymagające doprecyzowania bądź uzupełnienia.

Doktorant zapoznawszy się z moimi zarzutami dostarczył obszernego wyjaśnienia udzielając na wszystkie wątpliwości/uwagi pozytywnej i dojrzałej odpowiedzi. Należy podkreślić, iż zauważone błędy nie uniemożliwiają sprawdzenia poprawności uzyskanych rezultatów.

Uwagi formalne (niestotne):

1. Niejednolity styl spisanie bibliografii.
2. Niekiedy drażniące błędy językowe jak np: "Pierwsza część całki J_1 ", "Niech więc od teraz ψ' jest ograniczone".
3. Brak spisu oznaczeń, brak rozróżnienia symboli D oraz D_s .
4. Niekonsekwentne objaśnienia dotyczące używanych symboli, np.:

- (a) dopiero po zapoznaniu się z tezą wiadomo czym jest w w lemacie 1.4;
- (b) nie jest opisane czym jest x_s u dołu strony 13.

Drobne błędy "literowe" (nieistotne):

1. W (G_4) , (G_7) brakuje doszczegółowienia (pozostawionego w domyśle) $\xi \neq 0$.
2. W równaniu (2.1) brakuje "-" przed div .
3. Oznaczanie funkcji przez $\psi(t)$ zamiast ψ na stronie 19.
4. Brak symbolu pochodnej przy ψ na stronie 14 w obliczeniach.

Pytania odnośnie tekstu:

1. Czy są znane przykłady nieliniowości nie będące postaci $f(x)F(u)$?
2. Jakie są przykłady funkcji G opisującej problem anizotropowy, prócz oczywistych i narzucających się wprost przykładów?
3. Jaki powinien być brzeg zbioru Ω ? Kiedy ten zbiór może być nieograniczony?
4. Na stronie 6 nie jest wyjaśniona subtelna relacja definicji normy w przestrzeni $W^{1,G}(\Omega)$ z jej refleksywnością. Dalej jednak rozumowanie jest poprawne.
5. Na stronie 8 w dowodzie pojawia się niewprowadzony symbol $\Omega_0 + th$ (i w następnych momentach w których jest używany). Odpowiednia interpretacja pozwala na zrozumienie dowodu, ale wyjaśnienie byłoby przydatne.
6. W dowodzie lematu 1.7 wygląda iż jest zbieżność tylko "lokalna". W mojej opinii łatwo dowód rozszerzyć na przypadek zbioru nieograniczonego.
7. W lemacie 1.9 zbiór powinien być ograniczony.

8. Na stronie 14 pojawia się bez wyjaśnienia kula B_R . Szkoda, że Autor nie wyjaśnił idea kryjącej się za takim rozpoczęciem dowodu.
9. W nierówność (2.2) nie jest jasne, czy powinno być D^2 czy $D_s D$?
10. Czy na stronie 20 stosuje się nierówność (2.7) czy jej dolne oszacowanie?
11. Nierówność (2.14) jest poprawna, ale mogłaby być lepiej rozpisana.
12. Dość nieprecyzyjne są wyjaśnienia odnośnie relacji warunków (F1)-(F4) z warunkami (A1)-(A3)- zwłaszcza w kontekście podawanego przykładu.
13. Niejasna jest definicja normy w przestrzeni E_1 ? Definicja E_1 nie współgra z tą użytą w pracy [21] ze spisu bibliografii. Podobnie jak i norma. Ponieważ tak samo było definiowane na początku pracy - wygląda to na przekopiowanie tego samego błędu. Niemniej jednak w dalszych rozważaniach stosowana jest poprawna definicja normy - stąd ten błąd jest nieistotny.
14. Jakie powinny być założenia w Twierdzeniu 3.7?

Opisane powyżej mankamenty nie mają wpływu na wartość wyników zawartych w rozprawie. Pracę czyta się dobrze, przejścia są na ogół dobrze i wyczerpująco objaśniane. Odniosłem wrażenie, iż widać duże zaangażowanie Autora w prowadzone badania. Głównymi wynikami rozprawy są:

- regularności rozwiązań równań typu anizotropowego (Twierdzenie 2.1. - oraz technika badania regularności rozwiązania słabego dokładnie analizowana w dowodzie);
- istnienie i regularność rozwiązań heteroklinicznych zagadnienia Allena-Cahna zawierającego również operator typu anizotropowego (Twierdzenie 3.1. , Twierdzenie 3.4- oraz technika badania istnienia rozwiązania słabego wraz z nakreśloną w Podsumowaniu planowaną kontynuacją badań).

Konkluzja: Nie mam wątpliwości, iż Pan Wroński jest dojrzałym matematykiem i przedstawiona rozprawa doktorska, mimo drobnych poniekąd uchybień opisanych w recenzji, spełnia wymagania *zwyczajowe i ustawowe* w dyscyplinie *matematyka*. Stąd wnoszę o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Długo wahałem się czy praca powinna być wyróżniona i czy wyróżniając pracę oceniamy przede wszystkim jej wartość matematyczną, czy powinniśmy też kłaść nacisk na stronę formalną. Pominąwszy uchybienia formalne praca przekracza standartowy poziom rozpraw doktorskich. Dodatkowo zawarte w niej podsumowanie świadczy o dojrzałości Pana mgra Wrońskiego i jego umiejętności samodzielnego formułowania programu badawczego. Wnoszę więc, mimo pewnych zastrzeżeń opisanych powyżej, o **wyróżnienie wyników matematycznych** zawartych w pracy.

Łódź, 29.04.2019

Marek Golech