Politechnika Łódzka
Instytut Matematyki

Łódź, 10 września 2016 r.

Prof. dr hab. Bogdan Przeradzki
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Recenzja pracy doktorskiej pana Roberta Krawczyka

Głównym rezultatem opiniowanej rozprawy jest istnienie przynajmniej dwóch rozwiązań homoklinicznych równania Newtona

$$\ddot{q}(t) + a(t)\nabla W(q(t)) = 0,$$

gdzie a jest funkcją rzeczywistą prawie okresową Bohra, a $W \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{l\})$ jest potencjałem mającym osobliwości wzdłuż prostej l nie zawierającej początku układu. Potencjał ten ma w początku układu maksimum globalne $W(0) = 0$, w nieskończoności jest istotnie mniejszy od $W(0)$, dąży do $-\infty$, gdy zbliżamy się do prostej l i $-W$ jest podparty od dołu przez kwadrat normy gradientu funkcji koercytywnej. Ten ostatni warunek, wprowadzony przez W.B. Gordona, nie jest spełniony przez potencjały sił grawitacyjnych, a jest dla oddziaływań silnych, co stanowiło motywację wspomnianej pracy Gordona. Przez rozwiązanie homokliniczne Autor rozumie rozwiązanie klasyczne dążące do zera wraz z pierwszą pochodną przy $t \to \pm\infty$. Założenia na potencjał powodują, że funkcja zerowa jest rozwiązaniem układu, a wspomniane dwa rozwiązania homokliniczne zbliżają się do niej obiegając prostą l w przeciwnych kierunkach. W szczególności oznacza to, że omawiany wynik jest specyficzny dla przestrzeni 3-wymiarowej. Główny rezultat pracy uogólnia wcześniejszy z pracy Janczewskiej i Maksymiuka z 2012 roku, gdzie $a(t) \equiv 1$. Dowód polega na zbadaniu funkcjonału działania

$$I(q) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)| - a(t)W(q(t)) \right) dt$$

na podzbiorze przestrzeni Sobolewa $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ złożonym z funkcji nie przyjmujących wartości z l. Autor dowodzi istnienia dwóch punktów krytycznych tego funkcjonału. Dla każdej funkcji z dziedziny funkcjonału wprowadza współrzędne walcowe r, φ, z (ta ostatnia wzdłuż prostej l z początkiem w

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

punkcie przecięcia l z płaszczyzną prostopadłą do tej prostej zawierającą 0; r, φ współrzędne biegunowe na wspomnianej płaszczyźnie z kątem mierzonym od wektora łączącego punkt przecięcia z 0), co pozwala obliczyć liczbę obrotu (ang. *winding number*)

$$WN(q) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)).$$

Pierwszą kluczową rolę w dowodzie odgrywa tzw. lemat reprezentacyjny pozwalający aproksymować we wspomnianej przestrzeni Sobolewa ciąg Palais-Smale'a (p_m) przez ciąg skończonych sum $\sum_{i=1}^{k} \tau_{\theta_{i,m}} v_i$, gdzie v_i są funkcjami ciągłymi z tej przestrzeni, $\tau_{\theta_{i,m}} v_i$ oznacza przesunięcie funkcji v_i o liczbę $\theta_{i,m}$. Przy tym gradienty zmodyfikowanych funkcjonałów I, w których w miejscu funkcji a występuje ustalona funkcja ciągła β_i o wartościach pomiędzy $\inf a$ i $\sup a$, znikają na funkcjach v_i. Co ciekawe, jedyne miejsce w wielostopniowym rozumowaniu, gdzie wykorzystuje się prawie okresowość funkcji a to definicja funkcji β_i, która jest jednostajną granicą podciągu $\tau_{\theta_{i,m}} v_i$, $m \in \mathbb{N}$, mianowicie zgodnie z twierdzeniem Bochnera tylko funcje prawie okresowe mają własność zwartości zbioru wszystkich przesunięć. Drugi ważny w długim dowodzie moment to wykorzystanie istnienia pola pseudogradientowego $\mathcal{V}$ do konstrukcji odwzorowania homoklinicznego. Wybierając dla równania autonomicznego

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\mathcal{V}(x)}{1 + \mathcal{V}(x)}$$

jako punkt startu $\eta(0) = q_m$ funkcję o dodatniej (lub ujemnej) liczbie obrotu, dostajemy Q będące słabą granicą ciągu Palais-Smale'a (q_m). To, że ta granica jest punktem krytycznym funkcjonału wymaga zastosowania lematu reprezentacyjnego.

W rozdziale ostatnim Doktorant zajmuje się kwestią istnienia rozwiązań prawie homoklinicznych równania

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = f(t)$$

tzn. rozwiązań dążących do zera przy $t \to \pm\infty$ (tu już bez pochodnych). Przy założeniu, że f jest ciągła i całkowalna z kwadratem, a gradient V jest ograniczoną funkcją t, Autor uogólnia wynik Janczewskiej otrzymując szukane rozwiązanie prawie homokliniczne jako granicę jednostajną ciągu q_k rozwiązań równania obciętego do przedziału $[-k, k]$ z warunkami okresowymi. Rozwiązania te są okresowo przedłużane na całą prostą, a granica jest w sensie zbieżności jednostajnej. W twierdzeniu 3.3 założono istnienie takich q_k, a następnie Doktorant pokazuje, że wystarczą założenia na V : $V(t,0) \equiv 0$ i $-V$ jest od góry ograniczona przez funkcję kwadratową $-b|q|^2$, $b > 0$, by to założenie było spełnione.

Przejdę teraz do oceny opisanej pracy. Bardzo wysoko oceniam główny rezultat rozprawy. Pokazuje on biegłość Autora w posługiwaniu się aparatem metod wariacyjnych analizy nieliniowej. Chociaż wymienione powyżej wyniki uogólniają wcześniejsze otrzymane przez Panią Promotor i innych, to przypadek prawie okresowej funkcji a wymagał zastosowania całkiem nowej drogi rozumowania, moim zdaniem zupełnie nieoczywistej, a ilość technicznych problemów napotkanych po drodze przekraczała zwykle spotykaną w rozprawach doktorskich. Wydaje mi się zresztą, że główny wynik – twierdzenie 2.9 – wraz ze wszystkimi szczegółami dowodowymi wystarczyłby do pozytywnej oceny tej pracy. Niektóre z tych szczegółów zostały pominięte poprzez odesłanie do prac innych autorów np. klasyczność rozwiązania słabego czyli punktu krytycznego funkcjonału oraz „teoria homotopii"pozwalająca obcinać funkcję $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{l\}$ do przedziału zwartego $[-T, T]$ - odsyłacze do pracy Janczewskiej i Maksymiuka. Zamiast tego autor dołączył ostatni rozdział z czym jeszcze można się zgodzić, gdyż jest on tematycznie z pracą związany, oraz rozdział 1 o funkcjach prawie okresowych. Zupełnie zbyteczne wydaje mi się pisanie o funkcjach prawie okresowych Stiepanowa, Weyla, Besicovitcha czy Lewitana. Ten fragment pracy zupełnie nie wiąże się z całą resztą. W paragrafie 1.1 omawiane są funkcje prawie okresowe Bohra (taka jest funkcja a powyżej), więc ten paragraf jest tu uzasadniony, ale jaką rolę pełnią dowody (dla przykładu istnienia wartości średniej)znanych twierdzeń z teorii tych funkcji? Jak już powyżej napisałem w zasadniczej części rozprawy wykorzystane jest tylko kryterium Bochnera równoważne definicji Bohra.

Wszystkie moje uwagi krytyczne dotyczą zresztą strony redakcyjnej rozprawy. Poza wymienionymi powyżej warto wymienić:

- żeby otrzymać nierówność (2.11) trzeba trochę popracować – nie jest ona prostą konsekwencją lematu i definicji I;
- stwierdzenie 2.13 oznacza po prosu, że oba infima $c^{\pm}$ są dodatnie czyli $\inf\{I(q)\}$ po wszystkich pętlach obiegających prostą l jest dodatni;
- odsyłacze w dowodach rozdziału 2 do wyników umieszczonych w rozdziale 3 (np. w dowodzie stw. 2.6), a więc późniejszym;

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

- wykorzystywanie domyślnie oznaczeń, które wydawały się mieć charakter lokalny, w dalszych, często odległych krokach dowodowych – Autor mógłby w spisie oznaczeń je umieścić wraz z podaniem strony zamiast wymieniania w tym spisie oznaczeń powszechnie stosowanych;
- podzielenie głównego wyniku tw. 2.9 na dwa – tw. 2.41 i tw. 2.43; tutaj w dowodzie tego drugiego musimy w zasadzie powtórzyć dwa przypadki z tego pierwszego.

To wszystko utrudnia czytanie rozprawy i nawet dobrze napisany wstęp niewiele tu pomaga. W pewnym sensie łatwiejsze było zrozumienie głównego wyniku przy czytaniu pracy [17] Doktoranta, która go zawiera. Chciałbym jednak podkreślić, że praca napisana jest starannie, bo prawie nie znalazłem usterek literowych i merytorycznych, a wszystkie wymienione uwagi krytyczne prawdopodobnie pochodzą stąd, że najpierw powstały publikacje, z których na końcu trzeba było utworzyć jedną pracę, a ponadto rozumowanie jest rzeczywiście skomplikowane.

Biorąc wszystko pod uwagę, stwierdzam, że rozprawa spełnia wszystkie wymagania, zarówno ustawowe jak i zwyczajowe, stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgra Roberta Krawczyka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Widzę także możliwość wyróżnienia tej pracy, ale ze względu na fakt, że jest to wykorzystywane w bardzo różny sposób przez różne jednostki naukowe, wolałbym nie stawiać w tej opinii jednoznacznego wniosku i pozostawić tę kwestię nierozstrzygniętą do obrony rozprawy.