Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda, prof. UW

Warszawa, 22 kwietnia 2019

Recenzja rozprawy doktorskiej Karola Wrońskiego "Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym"

Recenzowana rozprawa doktorska została napisana pod kierunkiem dwóch promotorów: prof. dra hab. Marka Izydorka i dra inż. Jakuba Maksymiuka pełniącego rolę promotora pomocniczego. Mgr Karol Wroński zajmuje się równaniami eliptycznymi z operatorem najwyższego rzędu o niestandardowych warunkach wzrostu. Pierwsza część rozprawy dotyczy dość ogólnego równania, którego szczególnym przypadkiem jest równanie Allena-Cahna. Udowodniona została tam regularność rozwiązań. Drugim wynikiem jest twierdzenie o istnieniu klasycznych rozwiązań heteroklinicznych już właśnie dla równania Allena-Cahna z niestandardowymi warunkami wzrostu.

Autor rozprawy nie zajmuje się zupełnie abstrakcyjnym równaniem eliptycznym, lecz zagadnieniem, które opisuje pewien problem chemiczno-fizyczny, a mianowicie istnienie stanów przejściowych (czyli przemiany fazowej) dla metali, w tym wypadku, dwufazowych. Oryginalne prace Allena i Cahna dotyczą rozważań dla stopu żelaza i aluminium, np.

- Allen, S. M.; Cahn, J. W. (1975). Coherent and Incoherent Equilibria in Iron-Rich Iron-Aluminum Alloys. *Acta Metall.* 23 (9): 1017,

sformułowane zostało ewolucyjne równanie reakcji dyfuzji. Liniowa dyfuzja pojawiająca się w modelu miała swoje uzasadnienie we właściwościach rozpatrywanego materiału. Równania Allena-Cahna były jednak używane do opisu wielu innych procesów, jak np. segmentacja obrazu, wzrost kryształów, czy wzrost nowotworów, np:

- M. Bene, V. Chalupecky, K. Mikula, Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation, *Appl. Numer. Math.* vol.51 (2004) pp.187–205.
- A.A. Wheeler, W.J. Boettinger, G.B.Mcfadden, Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys, *Phys. Rev. Avol.* 45(1992)pp.7424–7439.
- M. Sabir, A. Shah, W. Muhammad, I. Ali, P.Bastian, A mathematical model of tumor hypoxia targeting in cancer treatment and its numerical simulation, *Comput. Math. Appl.* vol.74(2017)pp.3250–3259.

Niestety w rozprawie nie jest nic na ten temat wspomniane. W szczególności Pan Wroński zajmuje się uogólnieniem standardowych równań Allena-Cahna. Uogólnienie to jest dwojakie - po pierwsze Laplasjan zostaje zastąpiony operatorem eliptycznym o ogólnych warunkach wzrostu, a po drugie - dopuszczany jest anizotropowy wzrost. Zawsze wprowadzając takie uogólnienia, należy sobie zadać pytanie, czy jest możliwe wskazanie konkretnych substancji, które miałyby zachowanie, jakie postulowane jest w nowym modelu. Wymaga to oczywiście pewnej pracy, aby poszukać i przejrzeć artykuły z zakresu nauki o materiałach. Uważam jednak, że w szczególności rozprawa napisana na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej nie może pozostać na poziomie rozważań czysto abstrakcyjnych. Zaznaczę, że słuchając kilka miesięcy temu referatu Pana Wrońskiego pytałam go o motywacje fizyczne dla przedstawionych rozważań, jednakże nie otrzymałam wówczas odpowiedzi na to pytanie. Niestety w rozprawie również się ona nie pojawia. W obecnej wersji rozprawy znajduję jedynie uzasadnienia: *W szególności, nie było znane żadne twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych dla problemu Allena-Cahna z operatorem o innym wzroście*, natomiast cała fizyczna interpretacja rozważanego problemu mieści się w jednym zdaniu: *Eliptyczne równanie typu Allena-Cahna opisuje zjawiska przejść fazowych oraz dyfuzji.* Dlatego zdecydowanie oczekiwałabym przed wnioskowaniem o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu, że zobaczę nową wersję doktoratu, gdzie ten temat, z właściwymi odniesieniami do literatury, zostanie wyczerpująco potraktowany.

W rozdziale pierwszym wprowadzone zostały definicje przestrzeni funkcyjnych i podane własności ilorazów różnicowych. Tutaj odnajduję pewne dysproporcje. Istotna uwaga jest poświęcona faktom w przestrzeniach Sobolewa, które naprawdę należą do kanonu wiedzy, jaką powinien posiadać student wykształcony w zakresie równań różniczkowych cząstkowych. Mam tu na myśli lematy: 1.5, 1.6, 1.7, czy 1.8.

Umieszczenie dowodów tych faktów w rozprawie doktorskiej nie jest niczym złym, ale też nie wzbogaca jej. Natomiast wymienione są fakty, z których istotnie korzysta się w dowodach, a są one tylko przywołane. Oczywiście obecność dowodów tych faktów nie byłaby konieczna, gdyby Doktorant odniósł się konkretnie do literatury. Rozprawa nie dotyczy standardowych przestrzeni Orlicza, lecz przestrzeni uogólnionych - w tym wypadku uogólnienie dotyczy anizotropowości. Dlatego takie fakty, jak to, że klasa Orlicza i przestrzeń Orlicza są tożsame, gdy spełniony jest warunek Δ_2, tudzież ośrodkowość i refleksywność przestrzeni powinny być poparte bardzo konkretnym odniesieniem. Nie jest właściwym, że pojawia się jedynie odniesienie: *Precyzyjne sformułowania i dowody wszystkich podanych wyżej faktów można znaleźć w cytowanych wcześniej artykułach na temat przestrzeni Orlicza i Orlicza-Sobolewa.* Czy czytelnik miałby samodzielnie poszukiwać w wymienionych powyżej sześciu pozycjach? Konieczne tutaj są albo dowody tych faktów albo cytowania do konkretnych twierdzeń.

Na potrzeby rozdziału drugiego rozdziału najistotniejszy jest Lemat 1.4 dotyczący własności ilorazów różnicowych w przestrzeniach $W^{1,G}$. Odniesienie jest do artykułu Marcelliniego [12]. Nie jest to jednak właściwe odniesienie, gdyż w pracy tej rozważane są przestrzenie izotropowe zależne od modułu gradientu. Dlatego również w tym wypadku albo powinny się pojawić dowody tych faktów albo odniesienie do pozycji, w której byłby zamieszczony dowód dla przypadku anizotropowego.

Drugi rozdział poświęcony jest wewnętrznej regularności słabych rozwiązań równania (2.1). Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 2.1, które mówi, że rozwiązania są klasy $W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ oraz $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$. Pierwszy zarzut, jaki mi się tutaj pojawia, to że nie została podana definicja słabego rozwiązania. Z treści Twierdzenia 2.1 można domniemywać, że jest to funkcja klasy $W^{1,G}_{loc}$, która standardowo spełnia równanie (2.1) w sensie dystrybucyjnym (czyli po przemnożeniu przez funkcję gładką o zwartym nośniku i scałkowaniu po Ω). Jednakże na początku podrozdziału 2.2 wykorzystywany będzie fakt, że równanie może być testowane funkcją klasy $W^{1,G}$ o zwartym nośniku. Pytanie, na które w rozprawie nie ma odpowiedzi, to czy możemy testować takimi funkcjami. Jest to nietrywialne pytanie związane z gęstością funkcji gładkich o zwartym nośniku w $W^{1,G}_0(\Omega)$. Zarówno definicja słabego rozwiązania, jak i dyskusja na ten temat w rozprawie powinna być obecna.

Pojawia się też pewna niejasność dotycząca określenia dziedziny, na jakiej rozpatrywany jest problem. Na początku pierwszego rozdziału dowiadujemy się, że Ω

Pl

jest zbiorem otwartym i spójnym. We wstępie jest powiedziane, że rozważane są rozwiązania okresowe w $n-1$ współrzędnych i heterokliniczne w pierwszej współrzędnej. Dotyczy to jak rozumiem trzeciego rozdziału, w którym równanie (AC) jest określone na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Nie jest natomiast jasno powiedziane, co wiemy o Ω w rozdziale drugim. W szczególności w dowodzie Lematu 1.9 jedna ze stałych absolutnych zależy od miary zbioru Ω, co oznacza więc, że jest ona skończona. Zastanawiające jest, że równanie (2.1) nie zostało uzupełnione o warunki brzegowe.

Kolejną kwestią z rozdziału drugiego, na której chciałam się skupić, są założenia przyjęte na funkcję G. Ponownie brakuje mi tu odniesienia do literatury, bądź dowodu faktu, że z warunku (G4) wynika warunek Δ_2. To nie jest trudne rozumowanie, aczkolwiek komentarz na ten temat, np. odniesienie do artykułu [18] byłoby wskazane. Na koniec uwaga, która jest konieczna. Mamy układ założeń, ale niestety nie został przytoczony jakikolwiek przykład funkcji spełniających te założenia.

Trzeci rozdział dotyczy rozwiązań heteroklinicznych. Nigdzie w rozprawie nie udało mi się znaleźć informacji, dlaczego akurat takie rozwiązania są interesujące? Rozumiem argument, że zaraz po trywialnych stałych rozwiązaniach są one najczęściej rozważane z uwagi na to, że są dość prostymi rozwiązaniami. Jednakże po przeczytaniu rozprawy nadal nie wiem, dlaczego są ciekawe z punktu widzenia zastosowań. W trzecim rozdziale głównym pytaniem, które mnie nurtuje jest wymóg refleksywności przestrzeni $W^{1,G}$. Pan Wroński wprowadza przestrzeń E_1 i w podrozdziale 3.1. korzystając z jej refleksywności używa odpowiedniej wersji twierdzenia Banacha-Alaoglu żeby wybrać podciąg słabo zbieżny. Jednakże zauważmy tutaj, że wystarczyłaby informacja o ośrodkowości przestrzeni predualnej, aby wybrać podciąg słabo z gwiazdką zbieżny. Czy taka informacja nie byłaby wystarczająca? Może wówczas niektóre założenia możnaby osłabić?

W dalszej części Doktorant korzysta z twierdzenia z monografii [15]. W przytoczonym twierdzeniu rozwiązania mają być klasy $C^0 \cap W^{1,2}_{loc}$. Nie pojawił się niestety komentarz, czy to założenie jest spełnione przez rozwiązania (AC). Wcześniejsze twierdzenie, z którego Doktorant korzysta - Twierdzenie 6.3 z [9] - nie zostało przywołane. W tego typu faktach istotną rolę odgrywa częstko wymiar przestrzenny. Zdecydowanie wspomniany fakt powinien zostać przytoczony, aby czytelnik mógł mieć pewność, że spełnione są wszystkie potrzebne założenia. Jest to o tyle istotne, że monografie autorstwa O. Ladyzhenskiej są dość skomplikowane notacyjnie i dyskusja, czy faktycznie można użyć konkretnego faktu jest bardzo istotna.

Doktorat zawiera pewien nowy, ciekawy wynik Przy przyjętych założeniach można się spodziewać takiego rezultatu. Użyte metody są raczej standardowe, niewiele jest naprawdę nowych pomysłów. Przedstawione rezultaty są dość skromne w stosunku do doktoratów, które do tej pory czytałam. W szczególności nie rozumiem więc, dlaczego niektóre rozumowania są skracane. Byłoby to zrozumiałe w artykule do czasopisma, bądź w rozprawie, która byłaby zbyt obszerna. Toteż w ostatnim podrozdziale 3.3. uważam, że zupełnie bezzasadnie zostały pominięte dowody nierówności $0 < v < 1$.

Konkluzja. Uważam, że rozprawa jest ciekawa, ale wnioskuję, żeby wymienione przeze mnie usterki w doktoracie zostały usunięte zanim będę mogła wnioskować o dopuszczenie Pana Karola Wrońskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z poważaniem

ASh

Agnieszka Świerczewska-Gwiazda