UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda, prof. UW

Recenzja poprawionej wersji rozprawy doktorskiej Karola Wrońskiego "Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym"

W nowej wersji rozprawy mgr Karol Wroński wprowadził poprawki, o które prosiłam w swojej pierwszej recenzji. Poniżej szerzej odniosę się do zasadności tych poprawek. Wszystkie inne drobne poprawki, o których nie wspominam w niniejszej recenzji, jak np. precyzyjne odniesienia do literatury, czy wyjaśnienie niektórych kroków, zostały uzupełnione w nowej wersji rozprawy i nie mam do nich dalszych uwag.

Przypomnę, że pierwszym moim zarzutem był brak omówienia możliwych zastosowań rozwijanej teorii, równanie Allena-Cahna opisuje pewien problem chemiczno-fizyczny. Dlatego ciekawa byłaby dyskusja, na ile uogólnienie założeń w stosunku do obecnie stosowanych w literaturze jest ciekawe z uwagi na możliwe aplikacje modelu.

W nowej wersji pojawiło się kilka odniesień do artykułów odnoszących się do opisu różnych procesów, jak np. segmentacja obrazu, wzrost kryształów, czy wzrost nowotworów. Może ciekawa byłaby dogłębniejsza analiza dotycząca możliwych cech anizotropowych w materiałach, ale mimo to, obecna wersja jest pod tym względem zadowalająca, liczę że może elementy takie pojawią się w przyszłych badaniach Pana Wrońskiego.

Najistotniejszym moim zarzutem była kwestia braku dowodu własności ilorazów różnicowych, przypomnę:

Na potrzeby rozdziału drugiego rozdziału najistotniejszy jest Lemat 1.4 dotyczący własności ilorazów różnicowych w przestrzeniach $W^{1,G}$. Odniesienie jest do artykułu Marcelliniego [12]. Nie jest to jednak właściwe odniesienie, gdyż w pracy tej rozważane są przestrzenie izotropowe zależne od modułu gradientu. Dlatego również w tym wypadku albo powinny się pojawić dowody tych faktów albo odniesienie do pozycji, w której byłby zamieszczony dowód dla przypadku anizotropowego.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

W nowej wersji Pan Wroński zamieścił dowód tego lematu (obecnie oznaczony jako Lemat 1.5). Dowód ten jednak nie był poprawny, opierał się o oszacowanie, które w przypadku anizotropowym nie był o prawdziwe. Dlatego też spotkałam się z Panem Wrońskim i przedstawiłam mu swoje wątpliwości. Z przyjemnością mogę stwierdzić, że po zastanowieniu się był on w stanie przedstawić mi na tablicy poprawny argument. Potem otrzymałam dodatkowo te wyjaśnienia w formie pisemnej, które dołączam do niniejszej recenzji.

Ostatni istotny argument dotyczył wymaganych założeń na współczynniki, aby móc skorzystać z rezultatów regularnościowych, przypomnę:

W dalszej części Doktorant korzysta z twierdzenia z monografii [15]. W przytoczonym twierdzeniu rozwiązania mają być klasy $C^0 \cap W^{1,2}_{loc}$. Nie pojawił się niestety komentarz, czy to założenie jest spełnione przez rozwiązania (AC). Wcześniejsze twierdzenie, z którego Doktorant korzysta - Twierdzenie 6.3 z [9] - nie zostało przywołane. W tego typu faktach istotną rolę odgrywa często wymiar przestrzenny. Zdecydowanie wspomniany fakt powinien zostać przytoczony, aby czytelnik mógł mieć pewność, że spełnione są wszystkie potrzebne założenia. Jest to o tyle istotne, że monografie autorstwa O. Ladyzhenskiej są dość skomplikowane notacyjnie i dyskusja, czy faktycznie można użyć konkretnego faktu jest bardzo istotna.

Po przeczytaniu odpowiedniego fragmentu w nowej wersji rozprawy nadal miałam obawy, że założenia są zbyt słabe w trzecim rozdziale. Również tę kwestię omówiliśmy i zgodziliśmy się, że założenia te należy wzmocnić. Szczegóły znajdują się w wyjaśnieniu przesłanym mi przez Pana Wrońskiego i załączonym do recenzji.

Konkluzja. Na podstawie obecnej wersji rozprawy wnioskuję o dopuszczenie Pana Karola Wrońskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z poważaniem

ASh

Agnieszka Świerczewska-Gwiazda

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

Fragment dowodu lematu 1.5

Fragment *"Ograniczoność $D\eta$ gwarantuje istnienie takiego wektora ξ_0, że $G(D\eta) \leqslant G(\xi_0)$ na Ω. Wówczas $G(2D\eta\, \psi(\Delta_h u)) \leqslant G(2\xi_0 L|\Delta_h u|)$. Przyjmując w lemacie 1.3 $\xi = 2L\xi_0$ otrzymujemy $\Delta_h u \in L^{\widetilde{G}}(\Omega_{|h|})$. To gwarantuje całkowalność $G(2D\eta\, \psi(\Delta_h u))$ i kończy dowód własności (C)."* nie jest poprawny i powinien być zastąpiony przez:

Założenie $G(\cdot) \prec |\cdot|^\beta$ oznacza, że

$$\exists_{M,c} \forall_{|\xi|>M} G(\xi) \leqslant c|\xi|^\beta$$

Jeśli więc $|2D\eta(x)\, \psi(\Delta_h u(x))| > M$ to

$$G(2D\eta(x)\, \psi(\Delta_h u(x))) \leqslant c|D\eta(x)|^\beta |\psi(\Delta_h u(x))|^\beta \leqslant c'|\Delta_h u(x)|^\beta$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z ograniczoności $D\eta(x)$ i warunku Lipschitza dla ψ.

Niech $A = \{x \in \Omega : |2D\eta(x)\, \psi(\Delta_h u(x))| > M\}$. Wówczas

$$\int_\Omega G(2D\eta(x)\, \psi(\Delta_h u(x)))dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega\cap A} c'|\Delta_h u(x)|^\beta dx + \int_{\Omega \cap A'} G(2D\eta(x)\, \psi(\Delta_h u(x)))dx$$

Skończoność pierwszej całki wynika z $W^{1,G}(\Omega) \subset L^\beta(\Omega)$ co wykazano w dowodzie lematu 1.3. Skończoność drugiej całki jest oczywista, ze względu na ograniczoność funkcji podcałkowej. To kończy dowód całkowalności funkcji $G(2D\eta(x)\, \psi(\Delta_h u(x)))$.

Możliwość stosowania twierdzenia 3.6 - warunek Holdera

Na początku rozdziału trzeciego przed podaniem $(F_1) - (F_4)$ pojawia się założenie $F \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ silniejsze od potrzebnego tu $F_u \in C^{0,\beta}$. Niestety zabrakło w rozdziale trzecim dodatkowego założenia $G \in C^{2,\beta}$ (dla pewnego $\beta \in (0,1)$). Podobnie jak i założenie ∇_2 powinno ono obowiązywać w całym rozdziale trzecim, ale nie jest konieczne w rozdziale drugim.

Słabe rozwiązania równania (2.1)
Funkcje u spełniające (2.4), czyli słabe rozwiązania istnieją (choć nie koniecznie dla wszystkich możliwych G i F). Przykładem takich słabych rozwiązań mogą być minima funkcjonału rozważanego w rozdziale 3 albo inne minima funkcjonałów postaci $\int_\Omega G(Du) + F(x,u)dx$. Takie funkcjonały na pewno posiadają minima gdy F jest ograniczone z dołu. Przyjęcie w definicji słabego rozwiązania $\varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)$ nie zmienia istotnie ogólnego rozumienia pojęcia słabego rozwiązania, gdyż funkcje klasy $C_0^\infty(\Omega)$ są (przy odpowiednich założeniach) gęste w $W_0^{1,G}(\Omega)$.