POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Robert Krawczyk

Streszczenie rozprawy doktorskiej nt.:
Rozwiązania homokliniczne prawie okresowych układów Newtonowskich w $\mathbb{R}^3$ z osobliwościami typu Gordona

Promotor: dr hab. Joanna Janczewska
Politechnika Gdańska

Gdańsk 2016

Tematyka moich badań dotyczy problemu istnienia i krotności rozwiązań w układach Hamiltonowskich drugiego rzędu, w szczególności w układach z prawie okresowym potencjałem i punktami osobliwymi typu Gordona.

Centralnym problemem, jaki rozpatruję w pracy doktorskiej, jest istnienie rozwiązań homoklinicznych dla układu Newtonowskiego w $\mathbb{R}^3$,

$$\ddot{q}(t) + a(t)\nabla W(q(t)) = 0, \tag{SF}$$

gdzie funkcja $a(t)$ oraz potencjał $W(q)$ spełniają następujące założenia:

(a1) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją prawie okresową taką, że $a(t) \geq a_0 > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(H1) Istnieje prosta l taka, że $l \cap \{0\} = \emptyset$, $W \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus l, \mathbb{R})$ oraz l składa się z punktów osobliwych potencjału W, tzn. $\lim_{x\to l} W(x) = -\infty$.

(H2) $W\colon \mathbb{R}^3 \setminus l \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Gordona w otoczeniu prostej l, tzn. istnieją otoczenie $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3$ prostej l oraz funkcja $U \in C^2(\mathcal{N} \setminus l, \mathbb{R})$ takie, że $|U(x)| \to \infty$, gdy $x \to l$ i
$$|\nabla U(x)|^2 \leq -W(x) \qquad \text{dla } x \in \mathcal{N} \setminus l.$$

(H3) $W(x) < W(0) = 0$ dla $x \neq 0$ oraz $W''(0)$ jest ujemnie określona.

(H4) Istnieje stała $W_0 < 0$ taka, że $\limsup_{|x|\to\infty} W(x) \leq W_0$.

W moich badaniach stosuję metody wariacyjne (rozwiązania otrzymuję jako punkty krytyczne funkcjonału działania określonego na odpowiednio dobranej przestrzeni Sobolewa) i metody topologiczne (stopień topologiczny - winding number).

Rozprawa doktorska podzielona została na trzy rozdziały. Pierwszy z nich zapoznaje Czytelnika z pojęciem funkcji prawie okresowej. Większa jego część poświęcona jest funkcjom prawie okresowym w sensie Bohra. To najważniejsza klasa z naszego punktu widzenia, ponieważ funkcja $a(t)$ w układzie (SF) jest prawie okresowa w sensie Bohra.

W Rozdziale 2. udowodniłem główne twierdzenie rozprawy doktorskiej - Twierdzenie 2.9, które mówi, że układ (SF) posiada przynajmniej dwa rozwiązania homokliniczne: Q^+, Q^- nawijające się dookoła prostej l odpowiednio z dodatnią i ujemną rotacją. Rezultat ten ukazał się w pracy [Kra2]. Poszerza on naszą wiedzę dotyczącą układów typu "strong-force" m.in. z artykułów: W.B. Gordona, P.H. Rabinowitza, P. Caldiroliego, L. Jeanjeana i M. Nolasca oraz M. Izydorka, J. Janczewskiej i J. Maksymiuka.

Ze względu na wygodę Czytelnika dowód Twierdzenia 2.9 podzieliłem na cztery etapy, z których każdy składa się z serii lematów, stwierdzeń i pomocniczych twierdzeń. Niektóre z nich same w sobie są ciekawe i ważne. Na szczególną uwagę zasługuje Lemat 2.32 - Lemat Reprezentacyjny charakteryzujący ciągi Palais-Smale'a funkcjonału działania. Lematy o takiej samej tezie przy innych założeniach na potencjał Newtonowski znajdują się w pracach np. V. Coti-Zelatiego i P.H. Rabinowitza oraz E. Serry, M. Taralla i S. Terracini.

W Rozdziale 3. udowodniłem Twierdzenie 3.3 o schemacie aproksymacyjnym dla zaburzonego układu Newtonowskiego

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = f(t), \tag{NS}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ oraz spełnione są następujące warunki:

(C2) Zaburzenie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest nietrywialne, ograniczone, ciągłe i całkowalne z kwadratem.

(C3) V jest klasy C^1 oraz $\nabla_q V$ jest ograniczony względem zmiennej t, tj.:

$$\forall_{M>0}\exists_{K>0}\forall_{t\in\mathbb{R}}\forall_{q\in\mathbb{R}^n} \quad |q| \leq M \Rightarrow |\nabla_q V(t,q)| \leq K.$$

Z układem (NS) stowarzyszam ciąg $2k$-okresowych problemów brzegowych

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \nabla_q V_k(t, q(t)) = f_k(t), \\ q(-k) - q(k) = \dot{q}(-k) - \dot{q}(k) = 0, \end{cases} \tag{NSk}$$

gdzie dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest $2k$-okresowym przedłużeniem na prostą funkcji $f|_{[-k,k)}$ oraz $V_k\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest $2k$-okresowym przedłużeniem $V\colon [-k,k)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Pokazałem, że jeżeli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ problem (NSk) posiada rozwiązanie okresowe q_k i ciąg norm $\{\|q_k\|_{W^{1,2}_{2k}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\}_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony, to z ciągu $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ możemy wybrać podciąg zbieżny w $C^2_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ do rozwiązania prawie homoklinicznego układu (NS). Wynik ten ukazał się w [Kra1]. Jest to uogólnienie schematu aproksymacyjnego J. Janczewkiej, która uzyskała analogiczny rezultat, z tym, że zamiast ograniczoności $\nabla_q V(t,q)$ zakładała okresowość potencjału V względem zmiennej t.

Następnie stosując schemat aproksymacyjny uzyskałem Twierdzenie 3.7 o istnieniu rozwiązania prawie homoklinicznego dla układu Newtonowskiego w $\mathbb{R}^n$,

$$\ddot{q}(t) - \nabla_q V(t, q(t)) = f(t),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, a $V\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ spełniają założenia (C2) i (C3). Ponadto,

(C4) $V(t,q) \geq b(t)|q|^2$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $q \in \mathbb{R}^n$, gdzie $b\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ jest funkcją ciągłą, która osiąga minimum na $\mathbb{R}$,

(C5) $V(t,0) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Obszerniejsze streszczenie mojej rozprawy doktorskiej, gdzie poza moimi wynikami odnoszę się również do wcześniejszej literatury dotyczącej układów Newtonowskich, stanowi Wstęp.

Bibliografia

[Kra1] R. Krawczyk, *A note on an approximative scheme of finding almost homoclinic solutions for Newtonian systems*, Banach Center Publications 101 (2014), 107-113.

[Kra2] R. Krawczyk, *Homoclinic orbits for an almost periodically forced singular Newtonian system in* $\mathbb{R}^3$, Annales Polonici Mathematici 114 (2015), no. 1 29-43.