Streszczenie rozprawy doktorskiej:

Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym.

Karol Wroński

Celem rozprawy jest udowodnienie dwóch twierdzeń dotyczących równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego. Pierwsze mówi o regularności słabych rozwiązań pewnej klasy równań eliptycznych z operatorem anizotropowym. Drugie mówi o istnieniu heteroklinicznych rozwiązań problemu typu Allena-Cahna z takim operatorem.

Eliptyczne równanie typu Allena-Cahna

$$-\Delta u(x) + F_u(x, u(x)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

opisuje zjawiska przejść fazowych oraz dyfuzji. Ten typ równania jest wyróżniony przez postać potencjału. Zakłada się, że nieujemna funkcja $F(x, \cdot)$ ma co najmniej dwa miejsca zerowe będące minimami oraz dodatkowo jest okresowa względem x. Typowym przykładem takiej funkcji jest $F(u) = u^2(u-1)^2$.

W literaturze rozważa się różne typy rozwiązań tego równania. W tej rozprawie zostało wykazane istnienie rozwiązań spełniających następujące warunki:

$$u(x + ke_i) = u(x) \text{ dla } 1 < i \leqslant n, \qquad \lim_{x_1 \to -\infty} u(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x_1 \to +\infty} u(x) = 1,$$

czyli okresowych w $n-1$ ostatnich współrzędnych i heteroklinicznych w pierwszej zmiennej x_1. Takie rozwiązania (jak również inne typy rozwiązań) są rozważane w wielu znanych artykułach, jednak w literaturze dotyczącej problemu Allena-Cahna istotnie dominują operatory ze wzrostem kwadratowym. W szczególności, nie było znane żadne twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych dla problemu Allena-Cahna z operatorem o wzroście innym niż kwadratowy.

W rozdziale trzecim rozprawy zostało wykazane, że w problemie typu Allena-Cahna klasyczny laplasjan może być zastąpiony operatorem eliptycznym postaci $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$, gdzie G jest pewną anizotropową funkcją wypukłą. Analogicznie, klasyczne przestrzenie Sobolewa $W^{1,2}_{loc}$ zostały zastąpione anizotropowymi przestrzeniami Orlicza-Sobolewa $W^{1,G}_{loc}$.

Rozważany problem typu Allena-Cahna ma następującą postać:

$$\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \tag{AC}$$

gdzie F jest takie jak opisano wcześniej, a G spełnia odpowiednie warunki wzrostu i eliptyczności.

Zastosowanie operatora eliptycznego pochodzącego od anizotropowej funkcji G oraz przestrzeni Orlicza-Sobolewa $W^{1,G}$ powoduje szereg technicznych trudności. Główną jest brak twierdzenia o regularności słabych rozwiązań dla tak ogólnych operatorów. Dotychczas znane twierdzenia nie były możliwe do zastosowania w rozważanym problemie. Powstała więc potrzeba udowodnienia odpowiedniego twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. Jest ono sformułowane i udowodnione w rozdziale drugim.

Pierwszy z głównych wyników rozprawy jest następujący:

- Przy odpowiednich założeniach na funkcję G oraz F, słabe rozwiązania równania (AC) są klasy $W^{1,\infty}_{loc} \cap W^{2,2}_{loc}$.

Twierdzenie to jest sformułowane z założeniami o większej ogólności niż założenia niezbędne dla twierdzenia o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych. W szczególności, nie są tam wymagane specyficzne dla problemu Allena-Cahna założenia na funkcję F. Dzięki temu samo twierdzenie o regularności jest ciekawym rezultatem dla teorii równań eliptycznych.

W twierdzeniu o regularności zostało założone, że funkcja G ma wzrost wielomianowy. Niekoniecznie jednak posiada wzrost związany z jedną ustaloną potęgą. Co więcej, dopuszczony jest też wzrost anizotropowy, tzn. funkcja G może w istotnie różny sposób zależeć od wszystkich pochodnych cząstkowych, a nie tylko od modułu $|Du|$.

Anizotropowe funkcje wypukłe mogą nie być monotoniczne ze względu na moduł, tzn. możliwe jest, że $G(\xi_1) > G(\xi_2)$ gdy $|\xi_1| < |\xi_2|$. Między innymi z tego powodu bezpośrednie stosowanie funkcji anizotropowych w dowodzie twierdzenia o regularności powoduje różnorodne trudności techniczne. To sprawia, że dowód tego twierdzenia wymaga specyficznych technik, dostosowanych do funkcji anizotropowej i jest przez to bardziej skomplikowany niż dowody analogicznych, znanych wcześniej twierdzeń dla funkcji G o wzroście izotropowym.

Wykazanie twierdzenia o regularności słabych rozwiązań pozwoliło udowodnić drugi główny wynik rozprawy, którym jest twierdzenie o istnieniu klasycznych rozwiązań heteroklinicznych problemu (AC).

- Jeśli G spełnia odpowiednie warunki wzrostu i eliptyczności oraz F spełnia założenia charakterystyczne dla problemu Allena-Cahna, to równanie (AC) posiada klasyczne rozwiązania heterokliniczne.

Rozprawa jest podzielona na trzy części. W rozdziale pierwszym są podane potrzebne definicje i lematy dotyczące ilorazów różnicowych i słabych pochodnych. W kolejnym rozdziale jest sformułowane i udowodnione twierdzenie dotyczące regularności słabych rozwiązań. W rozdziale trzecim jest udowodnione twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych równania typu Allena-Cahna.