Politechnika Gdańska
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Katedra Fizyki Teoretycznej i Informatyki Kwantowej

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Klaudia Wrzask

Kwantowanie pola w redukowalnych reprezentacjach algebr Lie oscylatora harmonicznego – zastosowanie do relatywistycznych korelacji EPR fotonów

Rozprawa przygotowana pod kierunkiem Prof. dr hab. Marka Czachora

Gdańsk, 2015

Publikacje

Rozprawa doktorska zawiera wyniki zawarte w niżej wymienionych pulikacjach

1. M. Czachor, K. Wrzask, *Automatic regularization by quantization in reducible representations of CCR: Point-form quantum optics with classical sources*, Int. J. Theor. Phys. 48, 2511 (2009); e-print arXiv:math-ph/0806.3510v3.
2. K. Wrzask, *Four-dimensional photon polarization space in the background of reducible representation algebras*; e-print arXiv:quant-ph/1511.00515.
3. K. Wrzask, *Relativistic EPR-type experiments for photons in the background of reducible representation HOLA algebras*; e-print arXiv:quant-ph/1511.02658.

Główną motywacją pracy jest przyjrzenie się relatywistycznemu modelowi pól fotonowych w zaproponowanych przez Marka Czachora redukowalnych reprezentacjach algebr Lie oscylatora harmonicznego i zastosowanie takiego modelu do relatywistycznych korelacji EPR fotonów.

Operatory kreacji i anihilacji w redukowalnych reprezentacjach przedstawia się w postaci produktu tensorowego na przestrzeniach pędu i polaryzacji

$$a(\boldsymbol{k}, 1) = |\boldsymbol{k}\rangle\langle\boldsymbol{k}| \otimes a. \tag{1}$$

Takie redukowalne reprezentacje nie przyjmują standardowych algebr Lie oscylatora harmonicznego:

$$[a_\alpha(\boldsymbol{k}, 1), a_{\alpha'}(\boldsymbol{k}', 1)^\dagger] = \delta_{\alpha,\alpha'}\delta_\Gamma(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')I(\boldsymbol{k}, 1), \tag{2}$$

$$[a_\alpha(\boldsymbol{k}, 1), n_{\alpha'}(\boldsymbol{k}', 1)] = \delta_{\alpha,\alpha'}\delta_\Gamma(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')a_\alpha(\boldsymbol{k}, 1), \tag{3}$$

$$[a_\alpha(\boldsymbol{k}, 1)^\dagger, n_{\alpha'}(\boldsymbol{k}', 1)] = -\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_\Gamma(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')a_\alpha(\boldsymbol{k}, 1)^\dagger. \tag{4}$$

Różnica polega na operatorowej dystrybucji $I(\boldsymbol{k}, 1) = |\boldsymbol{k}\rangle\langle\boldsymbol{k}| \otimes 1$, będącej w centrum algebry i takiej, że $\int d\Gamma(\boldsymbol{k})I(\boldsymbol{k}, 1) = I$ jest operatorem identycznościowym. W pracy pokazano, że reprezentacja wycałkowana po całym spektrum częstotliwości

$$a(1) = \int d\Gamma(\boldsymbol{k})\ a(\boldsymbol{k}, 1) = \int d\Gamma(\boldsymbol{k})\ |\boldsymbol{k}\rangle\langle\boldsymbol{k}| \otimes a, \tag{5}$$

przyjmuje standardową postać algebr Lie oscylatora harmonicznego:

$$[a_\alpha(1), a_{\alpha'}(1)^\dagger] = \delta_{\alpha,\alpha'}I(1), \tag{6}$$

$$[a_\alpha(1), n_{\alpha'}(1)] = \delta_{\alpha,\alpha'}a_\alpha(1), \tag{7}$$

$$[a_\alpha(1)^\dagger, n_{\alpha'}(1)] = -\delta_{\alpha,\alpha'}a_\alpha(1)^\dagger. \tag{8}$$

Ważnym elementem modelu redukowalnych reprezentacji jest definicja próżni

$$|O(1)\rangle = \int d\Gamma(\boldsymbol{k})O(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}, 0\rangle \tag{9}$$

z funkcją gęstości prawdopodobieństwa $Z(\boldsymbol{k}) = |O(\boldsymbol{k})|^2$. Okazuje się, że regularyzacja jest automatyczną konsekwencją zaimplementowania takiego modelu próżni. Taka postać próżni może mieć także znaczenie w relatywistycznych eksperymentach typu EPR.

Ponadto w pracy zaprezentowano czterowymiarową przestrzeń polaryzacji fotonów taką, która w porównaniu z formalizmem Gupty-Bleulera daje inną interpretację operatorów kreacji i anihilacji dla „czasowego” stopnia swobody. Taka interpretacja, wywodząca się z konstrukcji kowariantnego Hamiltonianu postaci

$$H = -\frac{p_{\boldsymbol{a}}p^{\boldsymbol{a}}}{2} - \frac{q_{\boldsymbol{a}}q^{\boldsymbol{a}}}{2}, \quad \boldsymbol{a} = 0, 1, 2, 3. \tag{10}$$

daje dodatnio zdefiniowane normy dla wszystkich czterech polaryzacyjnych stopni swobody. W (10) $p_{\boldsymbol{a}}$ i $q_{\boldsymbol{a}}$ są zmiennymi kanonicznymi

$$p_{\boldsymbol{a}} = i\partial_{\boldsymbol{a}} = i\frac{\partial}{\partial q^{\boldsymbol{a}}} = ig_{\boldsymbol{ab}}\frac{\partial}{\partial q_{\boldsymbol{b}}}, \tag{11}$$

przy czym $g_{\boldsymbol{ab}} = \mathrm{diag}(+, -, -, -)$. Definiujemy także operatory

$$a_{\boldsymbol{a}} = \frac{q_{\boldsymbol{a}} + ip_{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{2}} = \frac{q_{\boldsymbol{a}} - \partial_{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_0 - \frac{\partial}{\partial q_0},\ q_1 + \frac{\partial}{\partial q_1},\ q_2 + \frac{\partial}{\partial q_2},\ q_3 + \frac{\partial}{\partial q_3}\right), \tag{12}$$

$$a_{\boldsymbol{a}}^\dagger = \frac{q_{\boldsymbol{a}} - ip_{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{2}} = \frac{q_{\boldsymbol{a}} + \partial_{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_0 + \frac{\partial}{\partial q_0},\ q_1 - \frac{\partial}{\partial q_1},\ q_2 - \frac{\partial}{\partial q_2},\ q_3 - \frac{\partial}{\partial q_3}\right), \tag{13}$$

które spełniają następujące związki komutacyjne

$$[a_{\boldsymbol{a}}, a_{\boldsymbol{b}}^{\dagger}] = -g_{\boldsymbol{ab}}, \tag{14}$$

$$[a_{\boldsymbol{a}}, a_{\boldsymbol{b}}] = [a_{\boldsymbol{a}}^{\dagger}, a_{\boldsymbol{b}}^{\dagger}] = 0. \tag{15}$$

W powyższych wzorach indeks 0 odnosi się do „czasowej" polaryzacji, natomiast operatory z krzyżem są operatorami podnoszącymi energię i nie jest to jednoznaczne z operatorami kreacji dla wszystkich czterech polaryzacyjnych stopni swobody. Okazuje się, że interpretacja operatora a_0 jako operatora kreacji daje dodatnio określone normy i dobrze zdefiniowaną próżnię. Należy wspomnieć, że polaryzacje związane z operatorami a_0 i a_3 nie są obserwowane w eksperymentach optycznych. W związku z tym w pracy pokazano stany, które produkują standardowe pola elektromagnetyczne (tzn. fotony z dwiema polaryzacjami) z czterowymiarowych kowariantnych pól (tzn. pól z dwiema dodatkowymi polaryzacjami: „podłużnej" i „czasowej"). Ciekawe jest to, że takie stany mają strukturę podobną do stanów koherentnych.

Jednym z wyników pracy jest zaproponowany model czterech stanów Bella, taki w którym korelacje pozostają maksymalne dla dwóch baz: liniowej i kołowej we wszystkich układach odniesienia.

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(N) &= \int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ \left(\psi_{+-}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_+(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_-(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger} + \psi_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_-(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_+(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger}\right)\\ &= 2i\int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ e^{-i(\theta_{11}(\boldsymbol{k})-\theta_{11}(\boldsymbol{k'}))}\psi_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_{\theta}(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_{\theta'}(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{12}(N) &= \int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ \left(\psi_{+-}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_+(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_-(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger} + \psi_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_-(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_+(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger}\right)\\ &= \int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ e^{-i(\theta_{12}(\boldsymbol{k})-\theta_{12}(\boldsymbol{k'}))}\psi_{-+}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})\left(a_{\theta}(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_{\theta}(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger} + a_{\theta'}(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_{\theta'}(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{21}(N) &= \int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ \left(\psi_{++}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_+(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_+(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger} + \psi_{--}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_-(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_-(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger}\right)\\ &= -2i\int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ e^{-i(\theta_{21}(\boldsymbol{k})+\theta_{21}(\boldsymbol{k'}))}\psi_{--}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_{\theta}(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_{\theta'}(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger},\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{22}(N) &= \int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ \left(\psi_{++}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_+(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_+(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger} + \psi_{--}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})a_-(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_-(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger}\right)\\ &= \int d\Gamma(\boldsymbol{k})d\Gamma(\boldsymbol{k'})\ e^{-i(\theta_{22}(\boldsymbol{k})+\theta_{22}(\boldsymbol{k'}))}\psi_{--}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})\left(a_{\theta}(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_{\theta}(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger} - a_{\theta'}(\boldsymbol{k},N)^{\dagger}a_{\theta'}(\boldsymbol{k'},N)^{\dagger}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Ważnym elementem tej konstrukcji są funkcje polaryzacyjne $\theta(\boldsymbol{k})$ zależne od pędu, które transformują się w taki sposób, że kompensują fazę Wignera.

W końcowej części pracy zostały wyliczone relatywistyczne korelacje EPR dla dwóch przypadków: gdy na oba detektory działa transformacja Lorentza w taki sposób, że pozostają w tym samym układzie odniesienia oraz w przypadku gdy tylko jeden z detektorów pozostaje pod działaniem tejże transformacji. Rozpiszemy wyniki zawarte w pracy w sposób schematyczny. Dla dwóch detektorów Y_β, Y_α oraz dla pola dwufotonowego Ψ średnia EPR jest postaci

$$\langle O|\Psi^{\dagger}Y_{\beta}Y_{\alpha}\Psi|O\rangle. \tag{20}$$

Możemy użyć własności unitarności transformacji Lorentza, wtedy przyjmując niezmienniczość dwufotonowego operatora pola, tzn. $U_\Lambda^{\dagger}\Psi U_\Lambda = \Psi$, otrzymujemy

$$\langle O|\Psi^{\dagger}Y_{\beta}Y_{\alpha}\Psi|O\rangle = \langle O|U_\Lambda U_\Lambda^{\dagger}\Psi^{\dagger}U_\Lambda U_\Lambda^{\dagger}Y_{\beta}U_\Lambda U_\Lambda^{\dagger}Y_{\alpha}U_\Lambda U_\Lambda^{\dagger}\Psi U_\Lambda U_\Lambda^{\dagger}|O\rangle = \langle O_{\Lambda^{-1}}|\Psi^{\dagger}Y_{\Lambda\beta}Y_{\Lambda\alpha}\Psi|O_{\Lambda^{-1}}\rangle. \tag{21}$$

Oznacza to, że zadziałanie transformacją Lorentz na detektory $Y_{\Lambda\beta}Y_{\Lambda\alpha}$ oraz kompensującą transformacją na próżnię $O_{\Lambda^{-1}}$, będzie równoważne z niewykonaniem żadnej transformacji. Jednak kiedy wykonamy transformację Lorentza na obu detektorach w taki sposób, że pozostają w tym samym układzie odniesienia, wtedy średnia EPR jest postaci

$$\langle O|\Psi^\dagger U_\Lambda^\dagger Y_\beta Y_\alpha U_\Lambda \Psi|O\rangle \;=\; \langle O|\Psi^\dagger U_\Lambda^\dagger Y_\beta U_\Lambda U_\Lambda^\dagger Y_\alpha U_\Lambda \Psi|O\rangle \;=\; \langle O|\Psi^\dagger Y_{\Lambda\beta} Y_{\Lambda\alpha}\Psi|O\rangle. \tag{22}$$

Z drugiej strony jeżeli równoważnie zadziałamy transformacją Lorentza na stany i przyjmiemy założenie o niejednoznacznej próżni z funkcją gęstości prawdopodobieństwa $Z(\boldsymbol{k})$ oraz niezmienniczość operatorów pola, wtedy otrzymamy

$$\langle O|\Psi^\dagger U_\Lambda^\dagger Y_\beta Y_\alpha U_\Lambda \Psi|O\rangle \;=\; \langle O|U_\Lambda^\dagger U_\Lambda \Psi^\dagger U_\Lambda^\dagger Y_\beta Y_\alpha U_\Lambda \Psi U_\Lambda^\dagger U_\Lambda|O\rangle \;=\; \langle O_\Lambda|\Psi^\dagger Y_\beta Y_\alpha \Psi|O_\Lambda\rangle. \tag{23}$$

Oznacza to, że wykonanie transformacji na obu detektorach jest równoważne z wykonaniem transformacji na próżni. W przypadku gdy transformacja Lorentza działa na tylko jeden z detektorów, powiedzmy detektor Alicji Y_α, wtedy średnia EPR jest postaci

$$\begin{aligned}\langle O|\Psi^\dagger Y_\beta U_\Lambda^\dagger Y_\alpha U_\Lambda \Psi|O\rangle \;&=\; \langle O|\Psi^\dagger Y_\beta Y_{\Lambda\alpha}\Psi|O\rangle \;=\; \langle O|U_\Lambda^\dagger U_\Lambda \Psi^\dagger U_\Lambda^\dagger U_\Lambda Y_\beta U_\Lambda^\dagger Y_\alpha U_\Lambda \Psi U_\Lambda^\dagger U_\Lambda|O\rangle \\ &=\; \langle O_\Lambda|\Psi^\dagger Y_{\Lambda^{-1}\beta} Y_\alpha \Psi|O_\Lambda\rangle. \end{aligned} \tag{24}$$

Jak widać, działanie transformacji Lorentza na detektor Alicji nie musi dać taką samą średnią EPR co zadziałanie odwrotną transformacją Lorentza na detektor Boba. Gdyby eksperymenty potwierdziły taki rezultat, przemawiałoby to za definicją próżni (9) i jej wpływem na relatywistyczne eksperymenty.